ランダム性に対応する関数階層

宮部賢志　明治大学数学科

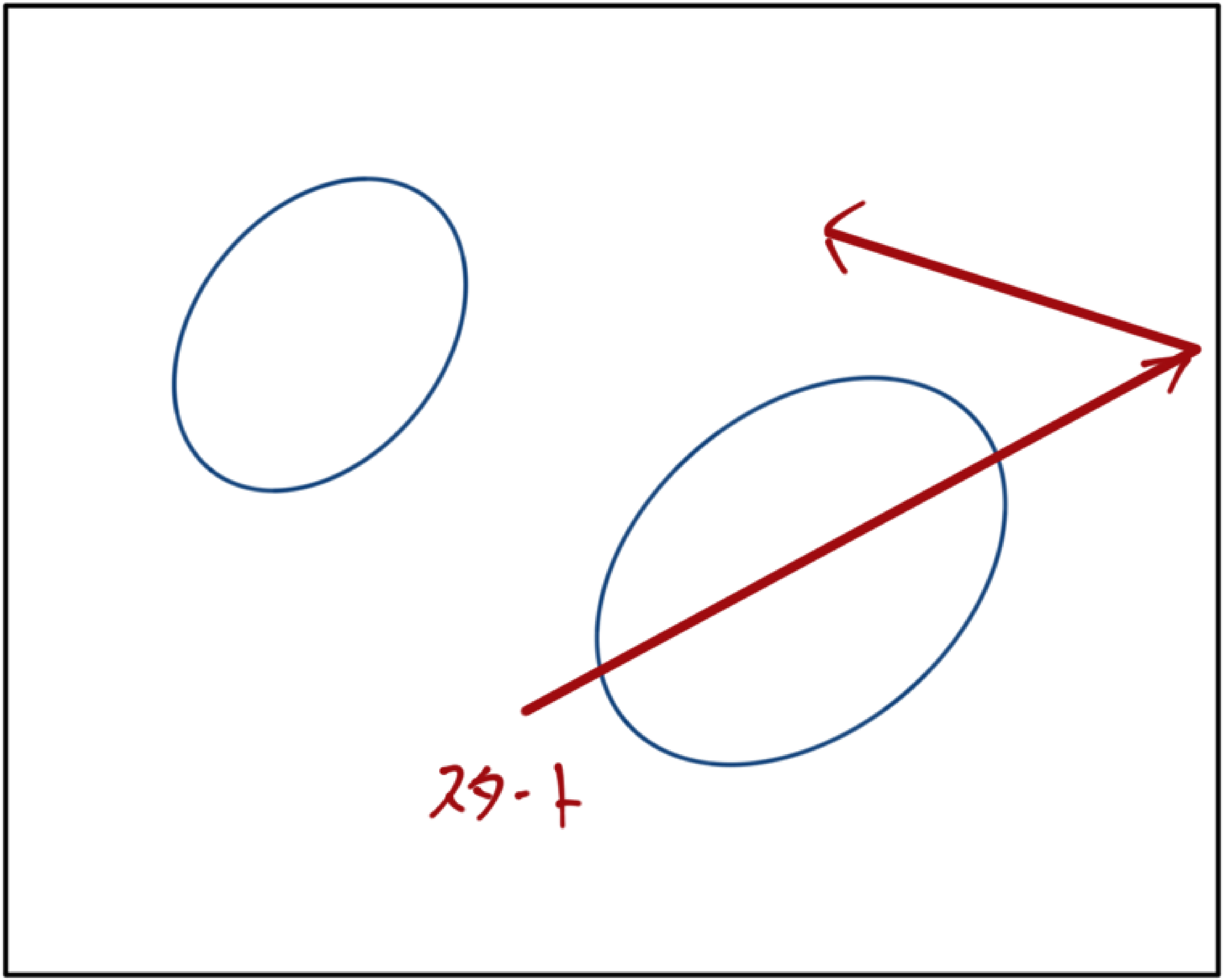
2017 年 12 月 26 日 (火)
証明論と証明活動@RIMS

証明の計算可能性

決定的な系での確率モデル

力学系，カオスなど $\cdots$ 確率モデルは不自然であるが，最近まで確率的に解釈する以外に数学的な定式化が存在しなかったもの

数論 $\cdots$ 素数分布の解析などにエルゴード理論が使われる．”It is evident that the primes are randomly distributed but, unfortunately, we don’t know what ’random’ means.” R. C. Vaughan


スタート

$Sinai$のビリヤード問題

正方形のビリヤード台でボールが動く．摩擦は無視する．角度を 1 つ決めて，ランダムな点から動き始める．ビリヤード台の上にある水たまりのようなもの A の上を通っている時間の割合と，A の割合は，一致する．

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\lambda\{t \leq T \ : \ x(t) \in A\}}{T} = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

すなわち,「気持ち」としては

時間平均=空間平均

Birkhoffのエルゴード定理

定理 1 (Birkhoff 1931). $\mu(X)=1$ の測度空間 (X,F,μ) 上の写像 $T:X\to X$ が *ergodic* な[1] 自己準同型とする．各可測集合 $A\subseteq X$ に対して，μ の意味でほとんどすべての点 $x\in X$ で，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_A\circ T^k(x)\to\mu(A)$$

[1] 大雑把に言って，空間が複数に分割できない

何が問題か

- 数学としては定義も定理も何も問題がない.
- この「ほとんどすべて」を確率 1 として解釈するのは, 自然とは言えない.
- 初期値鋭敏性などの他の性質との関連が見えにくい.
- 計算との関連を調べるのが難しい.

問題 2. 与えられた可測集合 A に対して，計算可能な初期点 x(よって軌道も計算可能) で，エルゴード定理の等式が成り立つものは存在するか？

「ランダムな初期値に対して成立する」と理解し定式化するのが，より直接的で本質的で，計算との関連も調べることができるようになる.

ランダム性

定理 3. 計算可能確率空間 (X, D, μ) とその上の *ergodic* な計算可能関数 $T : X \to X$ に対して,

- $x \in X$ が *Schnorr* ランダムであること
- すべての計算可測集合 A に対して $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(x) \to \mu(A)$ が成立すること

は同値.
「すべての *c.e.* 開集合 A」に置き換えた場合は, *ML* ランダム性を特徴づける.

系 4. すべての計算可測集合 A に対して, 上記の等式が成立する計算可能な点 $x \in X$ が存在する.
一方, 上記の等式が成立する計算可能な点 $x \in X$ が存在しないような *c.e.* 開集合 A が存在する.

理論の計算可能性

数学的事実と計算の関係を調べるためには，証明を追って計算可能性を見てやれば良い．

測度論などの理論を基盤に示される結果の場合，その理論の計算可能性を調べる必要がある．

しかし，測度論などの理論の場合，至る所で計算可能でない操作を行う．

結局，理論そのものを計算可能という観点から再構築する必要がある．

計算可能測度論

計算可測集合

計算可測集合 (computably measurable set) とは何だろうか？どう定義したら良いか？
単純のために $X = [0, 1]$ と Lebesgue 測度 μ 上で考察しよう.

第 1 案
「集合 A が μ-可測であるとは，外測度を定義して，$\cdots$,」
計算可能性との関連を追いかけるのは大変すぎ !!

Borel集合

第 2 案
Borel 集合に制限して考える.
Borel 集合族=開集合を含む最小の σ 加法族
開集合=開基 $\{(a,b) \ : \ a,b \in \mathbb{Q}\}$ の和となる集合
（第二可算空間であることが重要.）

開基の測度は常に計算可能.
開集合の測度は一般には計算可能ではない.

計算可能性

定義 5. 実数 $x \in \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，計算可能な有理数列 $\{a_n\}$ で $|a_n - x| \leq 2^{-n}$ となるものが存在すること．

$n \in \mathbb{N}$ を入力として与えて，x の 2^{-n} 近似の有理数を返すプログラムが書けるということ．

開基の測度は有理数なので計算可能．
有理数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が計算可能であったとしても，
$\bigcup_n (a_n, b_n)$ は計算可能とは限らない．
（停止問題の計算不可能性や，不完全性定理からすぐ出てくる．）
開基の有限和なら計算可能．

開基有限和での近似 1

定理 6. 任意の可測集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ と $\epsilon > 0$ に対して，閉集合 F と開集合 G が存在して，

$$F \subseteq A \subseteq G,\ \mu(G \setminus F) < \epsilon$$

が成り立つ．

「可測集合はほとんど開集合」

開基有限和での近似 2

定義 7. A が計算可測集合 (computably measurable set) であるとは，計算可能な開基の有限和の列 $\{B_n\}$ で，
$\mu(B_{n+1} \triangle B_n) \leq 2^{-n}$ となるものが存在して，
$A(x) = \lim_n B_n(x)$ となること．

対象差：$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

命題 8. A が計算可測集合なら，$\mu(A)$ は計算可能実数である．

集合か同値類か

測度論・確率論においていつも問題になるのが，集合や関数を通常の意味で見るのか，測度 0 の違いを無視した同値類で見ているのかの区別である．
計算可能測度論では，ランダム性を導入して考察する．

定理 9. 計算可能な開基の有限和の列 $\{B_n\}$ は $\mu(B_{n+1} \triangle B_n) \leq 2^{-n}$ を満たすとする．$x \in [0,1]$ が *Schnorr* ランダムであれば，$\lim_n B_n(x)$ は存在する．

計算可測集合をランダムな点では定義されている $\{0,1\}$ 値関数として見ている．

計算可測関数

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が可測関数であるとは，任意の開集合 (もしくは可測集合)$A \subseteq [0,1]$ に対して，$f^{-1}(A)$ が可測集合となること.

定義 10. $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可測関数であるとは，任意の開基の有限和 (もしくは計算可測集合) $A \subseteq [0,1]$ に対して，$f^{-1}(A)$ が一様に計算可測関数となること.

注意 11. f は少なくともほとんど至る所で定義されている必要がある.

*Lusin*の定理

定理 12. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が可測関数であることと，任意の $\epsilon > 0$ に対し連続関数 g とコンパクト集合 K が存在して，$\mu([0,1] \setminus K) < \epsilon$ かつ $x \in K$ に対して $f(x) = g(x)$ となること．

「可測集合はほとんど連続関数」

定理 13. $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可測関数であることと，全域な一様計算可能関数列 $\{g_n\}$ と一様 *co-c.e.* 閉集合 K_n が存在して，$\mu([0,1] \setminus K_n) \leq 2^{-n}$ かつ一様計算可能で，$x \in K_n$ に対して $f(x) = g(x)$ となること．

「計算可測関数はほとんど計算可能関数」

L^1 計算可能性

計算可測関数は L^1 計算可能性と深い関係がある．
確率空間 X に計算可能性が入っていれば，その上での $L^1(X)$ 空間にも自然に計算可能性が入る．その $L^1(X)$ での計算可能な点を L^1 計算可能な関数と呼ぶ．

定理 14. $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が L^1 計算可能であることと，f が計算可測関数で $\int f \, d\mu$ が計算可能実数であることは同値．

特に，L^1 の意味で計算可能に近似できるならば，ほとんど計算可能関数である．

使い方

例えば,

$$x \mapsto \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(x)$$

は，L^1 計算可能関数である．計算可能な測度を持つ co-c.e. 閉集合 U には計算可能な点を含むので，計算可能な点でこの値が $\mu(A)$ と等しくなるものが存在する．

複雑さの階層の精密化

Halting Problem

?

computable set

$\Rightarrow$

limit

?

computable function

$\Rightarrow$

limit

$C_{\mathbb{R}}$

$C[0,1]$

$CC[0,1]$

C_n

$\vdots$

C_2

C_1

⋮

2R

w2R

MR

CR

SR

WR

$\Longrightarrow$

⋮

SR

tmD 1 wR

⋮

tmD 0

tm-trivial

limit?

OWR

DensityR

MLR

CR

SR

対応

integral test

layerwise computable?

computably measurable function

computable measure theoryで使ったrepresentationで

Weihrauch degreeに埋め込み

computable

次数は何を測っているか

Turing 次数
　実数：計算することの困難さ
Weihrauch 次数
　実関数：計算することの困難さ
TM 次数
　実数：ランダム性，規則を見つけることの困難さ
W 次数
　実関数：ランダム性が保存される困難さ

ランダム性が必要となる場面において，何がそのランダム性を必要とするのに本質なのか，計算可能性という観点から調べる．

終わり

ありがとうございました