極限計算可能性における 1ジェネリックな点での連続性

宮部賢志　明治大学数学科

2018 年 2 月 14 日 (水)

鈴木研・宮部研合同ゼミ

ほとんどの点で上手く振る舞う

Darboux-Froda の定理

定理 1 (Darboux-Froda 1929). 任意の非減少関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ の非連続点は高々可算個である.

通常は名前なしで書かれる.
これからこの定理のような

「ある性質を持つ任意の実関数はほとんどの点で
うまく振る舞う」

という形の定理をいくつか紹介し，極限計算可能性との関連を見ていく.

定義の復習

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が非減少とは,

$$(\forall x,y)x\le y\Rightarrow f(x)\le f(b)$$

となること.
関数 f が $x=z$ で連続であるとは,

$$\lim_{x\to z} f(x)=f(z)$$

となること.
ある集合 A が可算であるとは，A と自然数の集合 $\mathbb{N}$ との間に全単射が存在すること．実数の集合は無限集合だが可算ではない.

跳躍不連続点

定義 2. $z \in \mathbb{R}$ が $f(x)$ の跳躍不連続点 (jump discontinuity) であるとは，$x = z$ での右極限と左極限が存在して，異なることをいう．

補題 3. 任意の非減少関数のすべての非連続点は跳躍不連続点である．

証明. 非減少関数 f に対しては，任意の点 $z \in \mathbb{R}$ について右極限と左極限が存在する：

$$\lim_{x \to z-0} = \sup\{f(x) \ : \ x < z\}, \ \lim_{x \to z+0} = \inf\{f(x) \ : \ x > z\}.$$

これらが一致しているならば，$x = z$ で連続となる． □

定理の証明

証明. A_n を右極限と左極限の差が $\frac{f(b)-f(a)}{n}$ より大きい点の集合とする．$n+1$ 個の点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ がすべて A_n の元であるとすれば，$y_0 = a$，$k = 1, \cdots, n-1$ に対して $y_k = (x_{k-1} + x_k)/2$，$y_{n+1} = b$ とすると，

$$\begin{aligned} f(b) =& f(a) + \sum_{k=0}^{n} (f(y_{k+1}) - f(y_k)) \\ \geq& f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{n} \cdot (n+1) \end{aligned}$$

となり矛盾．よって，$|A_n| \leq n$ であり，非連続点の集合 $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ は可算である． $\square$

微分可能性

定理 4 (Lebesgue 1904). 任意の非減少関数はほとんど至る所微分可能である.

この定理は $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の Lipschitz 連続な関数に拡張できる (Rademacher 1919).

どんな集合が，Lipschitz 連続な関数の微分不可能な点の集合となりうるか?
$n=m=1$ のときは，測度 0 の $\mathbf{\Sigma}^0_3$ 集合 (Zahorski 1946).
その他の結果は Alberti, Preiss, and Csörnyei (2011) などを参照.

連続微分可能性

今日の主役.

定理 5 (Brucker-Leonard 1966)**.** ある集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ について以下は同値.

(i) A がある導関数の非連続点となること.

(ii) A は $\mathbf{\Sigma}^0_2$ の *meager* 集合.

ある集合が meager であるとは,「すかすか」であることを意味する．meager には定まった訳はなさそうだが,「やせた集合」と訳されることもある．また，第 1 類集合 (a set of first category) とも呼ばれる．測度は入っていない．位相的な性質.

計算可能性の観点から

ランダム性と微分可能性

定理 6 (Brattka-Miller-Nies 2016). $z \in [0,1]$ について以下は同値.

(i) 任意の計算可能な *Lipschitz* 連続な関数 f は z で微分可能.

(ii) z は計算可能ランダム.

集合ではなく，点について議論している.
Lebesgue の定理の実効化と見ることができる.
Lipschitz 連続を有界変動に変えると ML ランダム性を特徴づける (Demuth 1975, BMN2016). その後，様々な変種が示された.

1-genericity

定理 7 (Kuyper-Terwijn 2014)**.** $z \in [0,1]$ について以下は同値.

(i) z は *1-generic.*
(ii) すべての微分可能な計算可能関数 f について，f は z で連続微分可能.

Brucker-Leonard の結果の実効化.

定義 8. $x \in [0,1]$ が 1-generic であるとは，任意の c.e. 開集合の境界に含まれないことをいう.

極限補題の 2 型への拡張

極限補題

定理 9 (Shoenfield の極限補題 1959?). $z \in 2^\omega$ に対して以下は同値.

(i) z は極限計算可能.
(ii) $z \in \Delta^0_2$.
(iii) z は停止問題から計算可能.

計算可能な列は計算可能に枚挙できないので，この対応関係は一様ではない.

ジャンプ

定義 10. ジャンプ作用素 $J : \omega^\omega \to \omega^\omega$ を，$p \in \omega^\omega$, $k \in \omega$ に対して，

$$J(p)(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \in U_n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する．ここで，$\{U_n\}$ はすべての c.e. 開集合の計算可能な枚挙とする．

定理 11 (ジャンプ正規形). F が極限計算可能であることと，ある計算可能な関数 G が存在して $F = G \circ J$ と書けることは同値.

genericity

定理 **12** (Brattka-Brecht-Pauly 2012). $p \in \omega^\omega$ が *1-generic* であることと，J が p で連続であることは同値.

微分可能な計算可能関数の導関数は極限計算可能であり，計算可能関数とジャンプの合成で書ける.
この事実は「1-genericity が連続微分可能性で特徴づけられる」ことを説明している.

Generalized Low

極限補題を 2 型に拡張する時には，連続性と連続度の壁がある．

定理 13 (Brattka)**.** $f : X \to Y$ が停止問題から計算可能であることと，極限計算可能かつ連続で連続度が停止問題から計算可能であることが同値.

固定した 1-generic な点を考えるときには，連続性が出る．さらに，停止問題からの計算可能性が出る．このことから，以下の有名な事実が出てくる．

定理 14. X が *1-generic* ならば，X は一般低 *(generalized low)*，すなわち $X' \leq X \oplus \emptyset'$.

研究課題

Darboux-Frodaの定理を実効化

Darboux-Froda の定理を実効化できるだろうか？計算可能関数は連続関数であるから，素直な実効化は存在しない．

問題 15. ある非減少な極限計算可能関数の非連続な点となる集合は Δ^0_2 に一致するか？

ランダムネス

極限計算可能性に測度を入れよう.

問題 16. L^1 計算可能関数の連続点の集合は Schnorr ランダムネスに一致するか？

問題 17. 積分検定の連続点は密度ランダムネスに一致するか？Ω 作用素を考えることで，密度ランダムネスが一般低を導くか？

極限補題再考

Brattka の論文では「停止問題から計算可能な関数」の特徴付けを行っている．また，極限計算可能関数の特徴付けは，本質的に Pauly-Brecht(2014) による計算可能性版 Jayne-Rogers の定理で与えられている．
測度を入れたものを考察することもできる．この場合，誤差の量の分割する必要があり，自明ではない．

問題 18. 弱 L^1 計算可能性を，連続関数の分割として特徴づけられるか？またその文脈で算術的階層を作れるか？

終わり

ありがとうございました