計算可能測度論
Computable Measure Theory

宮部賢志
明治大学理工学部数学科
Kenshi Miyabe
Department of Mathematics, Meiji University *

Abstract

エルゴード理論や学習理論など，ランダムな現象の解析に計算可能性の性質が必要となる分野は多い．そのような一般空間上のランダム性の研究の理論的基盤を与えるのが計算可能測度論である．測度論の計算可能性については，計算可能解析の分野で古くから研究されてきた．最近になってアルゴリズム的ランダムネスとの関連が調べられるようになり，様々な事実が整理されて理解されるようになった．本稿では最近の計算可能測度論の発展を概観する．

Abstract

When analyzing random phenomena in such as ergodic theory and learning theory, one sometimes needs properties of computability. Computable measure theory is a theoretical foundation of randomness in general spaces. There are some work on computability of measure theory in the field of computable analysis. Recently, some researchers have studied the relation with algorithmic randomness, and give a good view of many facts. In this note, we survey the recent development of computable measure theory.

1　ランダム性と計算可能性

小学校などで習う算数は通常足し算や掛け算という計算から始まる．計算は多くの場合，単純な基礎の適用の繰り返しで答えを求める手順である．中学校や高校などで複雑な計算を学ぶようになると，どの規則を適用するのが早く答えを求められるか適宜判断する必要が出てくるかもしれないが，適用できる規則は決まっている．このような計算の概念を数学的に定式化したのが，Turing 機械による計算や再帰的関数，λ 計算などである．これらの計算モデルにおいては，プログラムと入力に相当するものが与えられれば，規則の適用の繰り返しにより出力が定まる．これらの計算モデルによって計算可能な関数の族はすべて一致するので，これを**計算可能な関数**として数学的に定義するのが Church-Turing のテーゼである．詳しくは [28, 21] などの**計算の理論** (Theory of computation) の教科書を参照せよ．

一方，コイン投げのような次に起こる事柄が予測不可能な現象を考えることもある．予測不可能であったり，統計的に規則が見つけられなかったりする現象に対しては，確率という概念を使った確率モデルによって解析するのが一般的な手法である．確率論の数学的基礎づけは Kolmogorov による公理的確率論が標準的であり，その実体は測度論である．測度論や確率論の教科書は多く出版されており，それまでの学習状況によって適切なものを注意深く選ぶ必要があるだろう．

*research@kenshi.miyabe.name

計算という概念とランダム性という概念はこのように対象的な 2 つの概念であるが，計算とランダム性の関係性が問題になることは意外と多い．最も典型的なのが乱択アルゴリズムである．プログラムを書いているときに擬似乱数を使うことも多いだろう．計算量の分野において有名な未解決問題 BPP=P とは，大雑把に言うと「素早く計算できる問題群は乱数の使用を許したときに大きくなるか」という問題である．

もう 2 つ例を挙げよう．カオスのように初期値が定まっていても，その軌道が複雑となりうることがある.「軌道がランダムに見えるような初期値の集合の測度」の解析は通常の測度論を使って行うことができる．では，どのような初期値であれば軌道がランダムになるだろうか？軌道がある性質を満たすためには，初期値にはどのようなランダム性が必要になるか？このような問題を考える時には，計算可能性のような現れる対象の複雑さを考慮する必要がある．

学習理論においては，与えられたデータから計算可能な方法で予測を作るが，その予測の良さを評価する必要がある．その評価には「データがある確率分布からの標本であれば良い精度を与える」という形で述べることが多い．しかし，そもそもその確率分布が分からないので予測をしているのだから，絶対的な評価にはなり得ない．各点ごとに予測の良さを与えるためには，各点ごとのランダムさを調べる必要がある．

このような問題の解決のために必要なのが計算論と測度論の組み合わせである．計算可能測度論の解説を行った後に，どのような形で定式化できるのか述べて，関連研究を述べる．

ところが，計算論と測度論の相性はすこぶる悪い．計算は有限の情報で書ける規則の繰り返しの適用であった．ところが通常の測度論の教科書で重要な定理の証明を読むと，至る所に計算不可能な操作が出てきて，そのままでは計算可能性を追うのは難しい．そこで測度論そのものを再構築して，計算可能性を追えるようにする必要がある．例えば，実数上の微分や Riemann 積分の理論においても非構成的な手法は出て来るが，自然に解釈できることが多い．実解析の計算可能性の理論は**計算可能解析** (computable analysis)[26] として知られている．

相性の悪いもう 1 つの重要な点は，測度論では測度 0 の違いを無視するところにある．このことは測度論を構成する上で必要なことではあるが，各点ごとの性質のみで出力を与える計算とは相容れない．そこで対象に計算可能性の条件を課すことで，例外の点に制約を設ける．すると，うまく振る舞う点はランダムな点として定まる．計算可能測度論は測度論に単に計算可能性の条件を課しただけの理論ではなく，出てくる対象の複雑さに応じて測度 0 の集合を分類するという新たな視点で精密化しているのである．

本節では計算とランダム性が絡む問題では計算可能測度論が必要になること，その計算可能測度論では測度論の再構築が必要であること，ランダム性の概念が新たに必要になることを述べた．次節以降では具体的に計算可能測度論を見ていこう．測度論の計算可能性の研究は様々な文脈で必要に応じて試行錯誤しながら発展してきた．実質的に同じ概念が異なる名前で呼ばれたり，一度定義されたものがその後修正を繰り返されるということが頻繁に起こってきた．そのため，定義や定理の出典を正確に述べるのは難しい．本稿は数学的な側面に焦点を当て，歴史的な経緯については他の機会に譲り，出典は必要に応じて引用することにする．本稿の元となる計算可能測度論の文献としては，[2, 5, 9, 15, 19, 27] などが挙げられる．

2　計算可測集合

単純のためまずは $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度 μ を考える．Lebesgue 測度 μ はすでに構成されているものとして話を進めるが，以下の方法により測度も同時に作っていると思うこともできる．

最初に定義するのは計算可測集合 (computably measurable set) である．可測集合は測度論において最も基本的な対象であり，その名が示すように測ることができる集合である．計算可測集合は，計算可能に測ることができる集合のことである．必ずしも計算可能な集合ではない．computably は measurable にかかる副詞であることに注意せよ．

$[0,1]$ には通常の位相が入っており，有理数を両端とする開区間の族 (ただし，$0,1$ が端の場合にはその端を含むことができる) を開基とする．開基は可算集合であり，それぞれの開区間は有限の情報で表されることに注意する．

定義 1
集合 $A \subseteq [0,1]$ が**計算可測集合** *(computably measurable set)* であるとは，開基の有限和の計算可能な列 $\{B_n\}_{n\in\omega}$ で，$\mu(B_{n+1} \triangle B_n) \leq 2^{-n}$ となるものが存在して，すべての点 $x \in [0,1]$ について $A(x) = \lim_n B_n(x)$ となることをいう．

ここで，$\triangle$ は対象差を表す．すなわち，$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ である．また，集合 $A \subseteq [0,1]$ とその特徴関数 $A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ は同一視している．更に，極限 $\lim_n B_n(x)$ は存在しないかもしれないので，その場合は未定義であることを許す．集合と表現しているが，実際には $\{0,1\}$ への部分関数と見ている．

この背景にある考え方を説明しよう．各実数は有理数による近似列の極限として表せるように，距離空間上の点を有限情報で書ける点の近似列として表す．ただし，列の n 番目の項と極限の距離は 2^{-n} となるような近似列を考える．可測集合 A, B に対して，$d(A,B) = \mu(A \triangle B)$ として d を定義すると，d は擬距離 (pseudometric) となる．対象差の測度が 0 の集合を同一視して商空間を考え，計算可能な近似列を持つ同値類を計算可測集合と思いたい．この考え方は Šanin [25] にまで遡る．

この商空間による方法は自然な方法で説得力を持つ一方，各点が集合に含まれているかどうかの情報を捨て去ってしまう．そのためランダムネスとの関連を見ることができず，当初の目標にそぐわない．

また，構成が測度論に依存しており，必要以上に複雑になっている．通常の測度論における可測集合の定義は，外測度を経由するもので，計算可能性との関連を追うのは難しい．理論を構成するのに十分な定義を準備することは重要であるが，計算可能性との関連を見る際には，定義を計算可能性の観点で単純にすることが必要である．

このような観点から測度論における次の定理を思い出そう．

定理 2 (例えば [4, p.278], [24, Exercise 1.2.7], [1, Exercises 1.2.73])
$A \subseteq \mathbb{R}$ が可測集合であることは，任意の $\epsilon > 0$ に対して開集合 V と閉集合 F が存在して，

$$F \subseteq A \subseteq V,\ \mu(V \setminus F) < \epsilon$$

となることは同値．

大雑把に言えば，可測集合であることは開集合で近似できる (approximately open) ことと同じであることを意味している．任意の開集合は開基の有限和で近似できるから，計算可測集合を開基の有限和による計算可能な近似列ができるものとして定義している．開基の有限和の測度さえ定まっていれば，計算可測集合の測度はその近似列の測度の極限として表せることに注意しよう．

繰り返し述べているように計算可測集合 A と点 $x \in [0,1]$ について，$x \in A$ かどうかを議論したい．まず，各近似列 $\{B_n\}$ について極限が定まらないような点 x の集合は測度 0 である．更に計算可能な近似列は可算個しかないので，ほとんどの点は極限が定まる．そのような点は Schnorr ランダムな点として特徴づけられる．

定義 3 (Schnorr [20])
***Schnorr* 検定**とは一様 *c.e.* 開集合の列 $\{V_n\}_{n\in\omega}$ で，$\mu(V_n) \leq 2^{-n}$ かつ $\mu(V_n)$ が一様に計算可能であることをいう．$x \in [0,1]$ が ***Schnorr* ランダム**であるとは，任意の *Schnorr* 検定 $\{V_n\}$ に対し，$x \notin \bigcap V_n$ となることをいう．

ここで，開集合 V が **c.e.** であるとは，開基の計算可能な部分集合の和として書けることをいう．集合 $G \subseteq [0,1]$ が，ある Schnorr 検定 $\{V_n\}$ に対して $G \subseteq \bigcap V_n$ となるとき，G は **Schnorr 零** (Schnorr null) であると言う．そのような例外の点にならないかというすべての検定に合格した点が Schnorr ランダムな点である．

さきほどの計算可測集合で極限が定まるような点は Schnorr ランダムな点として特徴づけできる．

定理 4
$x \in [0,1]$ に関して以下は同値．

1. すべての計算可能な開基の有限和の列 $\{B_n\}$ で $\mu(B_{n+1} \triangle B_n) \le 2^{-n}$ を満たすものに対して，$\lim_n B_n(x)$ が存在する．
2. x は *Schnorr* ランダムである．

古くからあるこれらの概念にこのような関係があるのが理解されるようになったのは実は最近である．この形で書かれているわけではないが，実質的に [18] が最初のように思う．

さらに擬距離 d による同値類は Schnorr ランダムな点だけに注目すれば 1 点しか存在しない．

定理 5 ([15, Proposition 4.5])
計算可測集合 A, B に対して以下は同値．

1. $d(A,B) = 0$.
2. すべての *Schnorr* ランダムの点 x に対して $A(x) = B(x)$.

Schnorr ランダムな点 x と計算可測集合 A に対しては，$x \in A$ かどうかを議論できる．可測集合に対して，計算可能な近似列を持つものという制限を課すことによって，無視する零集合が制限されている．これによって各点ごとの性質が議論できるようになっているのである．

3 計算可測関数

本節では可測関数の計算可能性について考察する．通常の測度論では，関数 $f : X \to Y$ が可測関数であるとは，可測集合の f による逆像が可測集合になることとして定義する．この定義を素直に採用しよう．

定義 6
$f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が**計算可測関数** *(computably measurable function)* であるとは，有理数 p, q に対して $f^{-1}((p,q))$ が一様に計算可測集合となることをいう．

計算可測関数 f は部分関数でも良いが，定義されない点は Schnorr 零となり，ほとんど至る所定義されている．Schnorr ランダムな点 $x \in [0,1]$ と (p,q) に対して，$f(x) \in (p,q)$ かどうかは極限計算可能であり，$f(x)$ は定まっている．

計算可測関数は L^0 空間上の計算可能な点と見ることもできる．L^0 空間は可測関数の同値類による空間であり，

$$d(f,g) = \int \min\{|f-g|, 1\} d\mu$$

などの Lévy 距離により位相が入る．計算可測関数はこの空間において計算可能な階段関数 (多項式でも良い) の列によって近似できる関数としても特徴づけられる．

計算可測関数は，Lusin の定理の実効化によっても特徴づけられる．計算可能性の観点からは大変有用な事実である．

定理 7 (Lusin の定理)
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に関して以下は同値.

1. f は可測関数である.
2. 任意の $\epsilon > 0$ に対し連続関数 g とコンパクト集合 K が存在して，$\mu([0,1] \setminus K) < \epsilon$ かつすべての $x \in K$ に対して $f(x) = g(x)$.

大雑把に言えば，可測関数であるとは連続関数で近似できる (approximately continuous) ということである．これを実効化することで，計算可測関数の特徴付けが得られる.

定理 8
$f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ に関して以下は同値.

1. f は計算可測関数である.
2. 全域な一様計算可能関数列 $\{g_n\}$ と一様 *co-c.e.* 閉集合 K_n が存在して，$\mu([0,1] \setminus K_n) \leq 2^{-n}$ かつ一様計算可能で，$x \in K_n$ に対して $f(x) = g_n(x)$ となること.

2 の条件を満たす関数は Schnorr 各層計算可能性 (Schnorr layerwise computability) とも呼ばれている．この概念は Hoyrup-Rojas [8] により定義された layerwise computability の Schnorr ランダムネス版である．

計算可測関数 f はほとんど計算可能関数として特徴づけられている．特に，f と x および $x \in K_n$ となる n が与えられれば，$f(x)$ は $g_n(x)$ として計算できる．$x \in K_n$ となる n は x からは計算できないが，そのような n の最小値は Schnorr ランダムな点 x に含まれる非ランダムさを表していて，**ランダム性不足量** (randomness deficiency) と呼ばれている．計算可測関数はそのような不足量をアドバイスとして与えられたら計算ができる関数ということもできる.

4 L^1 計算可能性とマルチンゲール収束定理

関連する重要な概念として L^1 計算可能性を紹介しよう.

定義 9
$f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が L^1 **計算可能**であるとは，計算可能な階段関数 (もしくは多項式) の列 $\{s_n\}_{n\in\omega}$ で，$\int |s_{n+1} - s_n| d\mu \leq 2^{-n}$ となるものが存在して，$f(x) = \lim_n s_n(x)$ となること.

つまり L^1 計算可能関数は，L^1 空間上の計算可能な点で，その近似列の極限となっているような関数である．L^1 関数は可測関数である．L^1 計算可能関数については以下の事実が成り立つ.

定義 10
***Schnorr* 積分検定** *(Schnorr integral test)* とは下側半計算可能関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ で，$\int f \, d\mu$ が計算可能な実数となるもの.

定理 11 ([15])
関数 $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ に関して以下は同値.

1. f は L^1 計算可能.
2. f は計算可測関数で，$\int f \, d\mu$ が計算可能な実数.
3. 2 つの *Schnorr* 積分検定の差 g, h が存在して，$f = g - h$.

様々な証明を行う上では，L^1 計算可能であることや Schnorr 積分検定であることを示すことが容易である．特に，マルチンゲールの収束定理の 1 つである Lévy の 0-1 法則が実効化が様々な定理の源泉になる．

定理 12 ([19])
$f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ を L^1 計算可能関数とする．

$$\frac{1}{2^{-n}} \int_{[x \upharpoonright n]} f \, d\mu \to f(x)$$

の L^1 での収束は計算可能である．

これらの定理を示す際に重要になるのは以下の事実である．計算可測関数 f と計算可能関数 g が $||f-g||_1 = \int |f-g| d\mu \leq 2^{-2n}$ を満たすとする．このとき，f と g が大きく異なる場所は僅かであり，

$$\mu(\{x \ : \ |f(x) - g(x)| > 2^{-n}\}) < 2^{-n}$$

となる．このことから，ほとんどの点で g は f の良い近似になっており，その例外な点の測度も計算可能に抑えられる．このような縦 (例外の点) と横 (誤差が小さい) への分割の計算可能性が問題の本質である．

5　一般化と応用例

これまでの議論は自然に計算可能な距離空間とその上の計算可能な測度に拡張できる．その際には開基の選び方に注意が必要である．

定義 13
計算可能距離空間は (X, S, d) の 3 つ組で，X は集合，$S = \{s_i\}_{i \in \omega}$ は X 上の稠密な可算集合，d は距離となるものをいう．

定義 14
計算可能距離空間上の測度 μ が**計算可能**であるとは，関数 $i, e \mapsto \mu(\{x \ : \ d(s_i, x) < e\})$ が下側半計算可能であることをいう．

この定義は測度の空間上の計算可能性から自然に出てくるものである．ここで下側半計算可能を計算可能に置き換えることはできない．$d(s_i, x) > e$ となる x の集合の測度も下側半計算可能ではあるが，$d(s_i, x) = e$ となる x の集合の測度が正となるような i, e が存在するかもしれないからである．しかし上手く $\{e_i\}_{i \in \omega}$ を取ることで，$B_{i,j} = \{x \ : \ d(s_i, x) = e_j\}$ の測度が 0 で，$\{B_{i,j}\}$ が計算可能な測度を持つ開基になる ([9, Lemma 5.1.1])．これは Baire の範疇定理の計算可能性版からの帰結である．

計算可能測度論の一応用例を示しておこう．カオス理論における有名な事実を思い出しておく．

定理 15 (Birkhoff のエルゴード定理)
(X, μ) を測度付きの距離空間，T を測度保存でエルゴード性を持つ X 上の写像，$f : X \to \mathbb{R}$ を L^1 関数とする．ほとんどすべての $x \in X$ について，

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f \circ T^k(x) = \int f \, d\mu.$$

ではこの等式が成り立つような計算可能な $x \in X$ は存在するだろうか?X として計算可能距離空間，μ は計算可能測度とする．T に適当な計算可能性を課せば，L^1 計算可能関数 f に対して，$x \mapsto \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f \circ T^k(x)$ という関数が L^1 計算可能となることが示せる．それぞれの f についてはこの等式が成り立たない点の集合は Schnorr 零であり，それぞれの Schnorr 零には含まれない計算可能な点 x が存在する ([7])．

6　ランダム性の階層

出て来る数学的対象に適切に計算可能性を課せば，ランダムな点での性質が議論できるような測度論を構築できることを見てきた．次に，可測集合や可測関数の表現として計算可能でないものを許した場合に，対応するランダム性がどう変化するのか，関数の表現がどう対応するのか [27] を調べたい．この問題は微分可能性によるランダムの概念の特徴付けとして間接的に調べられてきた．

$\mathrm{WR}, \mathrm{SR}, \mathrm{CR}, \mathrm{MLR}, \mathrm{W2R}$ をそれぞれ Kurtz ランダム，Schnorr ランダム，計算可能ランダム，ML ランダム，弱 2 ランダムの集合とすると，次のような階層が知られている．

$$\mathrm{WR} \supsetneq \mathrm{SR} \supsetneq \mathrm{CR} \supsetneq \mathrm{MLR} \supsetneq \mathrm{W2R}.$$

これらを微分可能性によって特徴づける研究が行われてきた．

定理 16 (Lebesgue [13])
単調増加関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ はほとんど至る所微分可能．

有界変動関数は 2 つの単調増加関数の差として書けるので，同じくほとんど至る所微分可能である．この関数に計算可能性を課すと異なるランダム性を特徴づける．

定理 17 ([3])
$x \in [0,1]$ が計算可能ランダムであることと，すべての単調増加な計算可能関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が x で微分可能であることは同値．

$x \in [0,1]$ が *ML* ランダムであることと，すべての有界変動な計算可能関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が x で微分可能であることは同値．

微分可能性を積分の形で書くと以下のようになる．

定理 18 (Lebesgue [13])
任意の L^1 関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して，ほとんどすべての x で

$$\lim_{|B| \to 0} \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu = f(x)$$

が成立する．ここで，B は x を含む開区間 (一般には開球) で $|B|$ はその直径を表す．

この等号が成立する x を f の **Lebesgue 点**と呼ぶことにしよう．

f として L^1 計算可能関数にすると，Schnorr ランダム性を特徴づける．

定理 19 ([18])
$x \in [0,1]$ が *Schnorr* ランダムであることと，すべての L^1 計算可能関数の *Lebesgue* 点となることは同値．

似た形の結果が Kurtz ランダム性 [14] や弱 2 ランダム性 [3] についても知られている．関連する結果は [6, 17, 16] などにも見られる．

これらの問題の多くは，

$$M(\sigma) = \frac{1}{2^{-|\sigma|}} \int_{[\sigma]} f \, d\mu$$

というマルチンゲールの収束の速さの問題であり，

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{-n}} \int_{[x \upharpoonright n]} f \, d\mu$$

という近似列の収束の速さの問題である．M が計算可能なときには解析がし易いが，一般の場合の良い表現は知られていない．特に f が**積分検定** (integral test)，すなわち下側半計算可能で積分可能であるときが重要である．

本質的に同じ問題が汎用人工知能 [10] の文脈でも研究されている．Solomonoff の万能推論における**万能半測度** (universal semimeasure)M は，万能単調機械 U を使って

$$M(x) = \sum_{p\,:\,U(p)=x*} 2^{-|p|}$$

と定義される．実質的に最適なマルチンゲールと同じものである．M は様々な意味で良い性質を持つ．計算可能な測度 μ から「ランダム」に標本 $x \in 2^\omega$ を取ったとしよう．最初の n 桁 $\sigma = x \upharpoonright n$ までみた時に次の $n+1$ 桁目が $i \in \{0,1\}$ である確率は

$$\frac{\mu(\sigma i)}{\mu(\sigma)} \tag{1}$$

である．M は μ を知らない状態で予測を行うが，その予測は，

$$\frac{M(\sigma i)}{M(\sigma)} \tag{2}$$

である．Solomonoff [22, 23] は，この値 (2) が真の確率 (1) に確率 1 で収束することを示した．この「確率 1 で」の部分は「すべての ML ランダムな点で」で置き換えることができない [11, 12]．ML ランダム性よりも強いランダム性が必要である．この問題もまた L^1 計算可能ではないマルチンゲールの収束問題である．

これまで，エルゴード定理の収束点の問題，微分可能性によるランダム性の特徴付けの問題，万能半測度の収束点の問題などを見てきた．どれも計算可能測度論の問題，特にマルチンゲールの収束の速度の問題として理解することができる．これまで様々な結果が得られたが，これらを統一的に理解する枠組みとしての計算可能測度論の発展が必要である．

参 考 文 献

[1] V.I. Bogachev. Measure theory. Springer, 2007.

[2] Volker Bosserhoff. Notions of probabilistic computability on represented spaces. Journal of Universal Computer Science, Vol. 14, No. 6, pp. 956–995, 2008.

[3] V. Brattka, J. S. Miller, and A. Nies. Randomness and differentiability. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 368, pp. 581–605, 2016.

[4] Neal L. Carothers. Real analysis. Cambridge University Press, 2000.

[5] Abbas Edalat. A computable approach to measure and integration theory. Information and Computation, Vol. 207, No. 5, pp. 642–659, 2009.

[6] C. Freer, B. Kjos-Hanssen, A. Nies, and F. Stephan. Algorithmic aspects of Lipschitz functions. Computability, Vol. 3, No. 1, pp. 45–61, 2014.

[7] Stefano Galatolo, Mathieu Hoyrup, and Cristobal Rojas. A constructive Borel-Cantelli lemma. Constructing orbits with required statistical properties. Theoretical Computer Science, Vol. 410, No. 21-23, pp. 2207–2222, 2009.

[8] Mathieu Hoyrup and Cristobal Rojas. An Application of Martin-Löf Randomness to Effective Probability Theory. In Mathematical theory and computational practice, pp. 260–269. Springer, 2009.

[9] Mathieu Hoyrup and Cristobal Rojas. Computability of probability measures and Martin-Löf randomness over metric spaces. Information and Computation, Vol. 207, No. 7, pp. 830–847, 2009.

[10] M. Hutter. Universal artificial intelligence: Sequential decisions based on algorithmic probability. Springer, 2005.

[11] Marcus Hutter and A. Muchnik. On semimeasures predicting Martin-Löf random sequences. Theoretical Computer Science, Vol. 382, pp. 247–261, 2007.

[12] Tor Lattimore and Marcus Hutter. On Martin-Löf (non-)convergence of Solomonoff's universal mixture. Theoretical Computer Science, Vol. 588, pp. 2–15, 2015.

[13] Henri Lebesgue. Sur l'intégration des fonctions discontinues. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Vol. 27, pp. 361–450, 1910.

[14] Kenshi Miyabe. Characterization of Kurtz randomness by a differentiation theorem. Theory of Computing Systems, Vol. 52, No. 1, pp. 113–132, 1 2013.

[15] Kenshi Miyabe. L^1-computability, layerwise computability and Solovay reducibility. Computability, Vol. 2, pp. 15–29, 6 2013.

[16] Kenshi Miyabe, André Nies, and Jing Zhang. Using almost-everywhere theorems from analysis to study randomness. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 22, No. 3, pp. 305–331, 9 2016.

[17] André Nies. Differentiability of polynomial time computable functions. In LIPIcs-Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 25. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2014.

[18] N. Pathak, C. Rojas, and S. G. Simpson. Schnorr randomness and the Lebesgue Differentiation Theorem. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 142, pp. 335–349, 2014.

[19] Jason Rute. Topics in algorithmic randomness and computable analysis. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 2013.

[20] C.P. Schnorr. A unified approach to the definition of a random sequence. Mathematical Systems Theory, Vol. 5, pp. 246–258, 1971.

[21] Michael Sipser. 計算理論の基礎　原著第 2 版　2. 計算可能性の理論. 共立出版, 2008.

[22] R. J. Solomonoff. A formal theory of inductive inference I, II. Information and Control, Vol. 7, pp. 1–22,224–254, 1964.

[23] R. J. Solomonoff. Complexity-based induction systems: Comparisons and convergence theorems. IEEE Transaction on Information Theory, Vol. IT-24, pp. 422–432, 1978.

[24] Terence Tao. An introduction to measure theory. Ametican Mathematical Society, 2011.

[25] N. Šanin. Constructive Real Numbers and Constructive Function Spaces, Vol. 21 of Translations of Mathematical Monographs. Ametican Mathematical Society, Providence, 1968.

[26] Klaus Weihrauch. Computable Analysis: an introduction. Springer, Berlin, 2000.

[27] Klaus Weihrauch. Computability on measurable functions. Computability, Vol. 6, No. 1, pp. 79–104, 2017.

[28] 高橋正子. コンピュータと数学. 朝倉書店, 2016.