明日また太陽が昇る確率再訪

宮部賢志@明治大学

2019 年 3 月 15 日@第 11 回 SIG-AGI

研究の目的

この研究の目的は,

もし汎用人工知能が存在したとしたら,
どのような性質を持つか

について数学的に議論し証明すること.

「こうすればこういうことができる」というボトムアップ型の研究とは目的が異なる. 参考にはなるかもしれない.

「明日太陽が昇る確率」は一例.

主な道具

主要な道具は計算論 (computability theory)

専門用語	正確ではない例
Turing 機械	計算機・PC
万能機械	プログラミング言語
計算可能な関数	プログラムが書ける関数
c.e.	下や中から近似可能

確証の度合いとしての確率

0 か 1 しか取らない列の次の値を予測する.

例
「明日太陽が昇る確率」
「次に見たカラスが黒い確率」
「連勝中の F さんが次の試合にも勝つ確率」

Laplace の答えは，Bernoulli 分布を仮定し，更にそのパラメータ p は一様分布 $U(0,1)$ に従うと仮定する．ベイズの公式から，n 回連続で 1 が出ているときに，次も 1 の確率は,

$$\frac{n+1}{n+2}$$

と計算できる.

ゲームの設定

- 0 と 1 の公平なゲームで，当たれば賭けた金額が倍になって返ってくるとする．
- 借金はできない．
- 初期資金は 1 円，ただし，無限に小さい金額でも賭けることはできる．
- ずっと 1 が出続けているとする．

毎回全額を賭けることで，n 回の賭けの後には 2^n 円になる．
どんな結果であっても，どんな賭け方よりも速く発散させられるか？

Solomonoffの万能推論

定義 **1.** ν, μ を 2^ω 上の測度とする．ν が μ に対して倍優位 (multiplicatively dominate) であるとは，ある $c \in \omega$ に対し，すべての $\sigma \in 2^{<\omega}$ で，

$$\mu(\sigma) \leq c\nu(\sigma)$$

となること．

測度はゲームでの賭け方に対応している．ν はどんな結果であってでも μ と定数倍を除いて少なくとも同じくらい速く発散する．
どんなc.e.半測度に対しても倍優位なc.e.半測度が存在する．最善 (optimal) と呼ぶ．
計算可能な測度の族には最善のものは存在しない．

計算可能な予測理論へ

最善の予測が持つ性質を調べることができる．
ところが，最善の予測は計算不可能で，実装不可能．

問題点「最善の予測が持つ性質は，実装可能な良い予測が持つべきなのか？」

「十分賢い予測がすべて持つべき性質」を知りたい．

アイディア「ある測度に対して倍優位なすべての測度から作られる予測で成り立つ性質を調べよう！」

主定理

測度 μ, 計算可能な列 $A \in 2^\omega$，自然数 $n \in \omega$ に対し，

$$p(\mu, A, n) = \mu(A_n | A_{<n}) = \frac{\mu(A_{\leq n})}{\mu(A_{<n})}$$

定理 **2.** ある計算可能な測度 ν が存在し，ν に対し倍優位なすべての計算可能な測度 μ に対し，

$$\sum_n (1 - p(\mu, A, n)) < \infty$$

特に，$p(\mu, A, n) \to 1$.

その他の結果

(i) ν は A に依存するので，すべての計算可能な列の規則を見つけられる計算可能な測度は存在しない.
(ii) 和が収束する計算可能な列があれば，それよりは速く収束はできない.
(iii) 収束は単調ではなく，収束の速度は計算可能には抑えられない.

上の定理で構成される ν の計算量は $O(n^2)$ くらいで，現実的なもの.
収束の速度が計算可能には抑えられないのは Solomonoff の万能推論でもよく知られていた事実だが，それは計算可能な測度に制限しても抑えられない.

まとめ

- 倍優位の概念で，予測の賢さに preorder を入れた．
- これにより十分賢い予測が持つべき性質について議論できるようになった．
- 確認理論の文脈では，Laplace の結果よりも速い収束，非単調という Nicod の基準の拒絶，などが得られる．
- grue のパラドックスの説明には設定が不十分らしい．
- 交換可能性を仮定するなど様々な文脈で似たことが数学的に研究できそう．
- 計算可能な範囲での研究なので，従来の設定よりも遥かに楽．
- 量化の数が増えるので，順番は混乱しやすく，正しく理解してもらえるかは心配．

終わり

ありがとうございました