人工知能学会研究会資料
SIG-AGI-011-08

明日また太陽が昇る確率再訪

The chance that the sun will rise tomorrow revisited

宮部賢志 [1*]

[1] 明治大学理工学部数学科
[1] Department of Mathematics, Meiji University

Abstract: We propose a framework of the study of computable induction, which is a computable version of Solomonoff's universal induction. As a concrete example, we consider a problem of confirmation, such as the probability that the sun will rise tomorrow. Although we can not tell the exact probabilities, we can deduce the rate of the convergence up to a multiplicative constant, which is slightly faster than Laplace's result.

1 はじめに

与えられたデータの規則性を如何に見つけ予測するか．この推論の問題に対し，Solomonoff の万能推論は 1 つの解答を与える．予測を表現する測度に対し，c.e. という計算可能性による制限を与えることにより，この族の中で定数倍を除いて最善の測度 (optimal measure) が存在することが証明できる．この測度から導かれる推論・予測確率は万能推論 (universal induction) とかアルゴリズム的確率 (algorithmic probability) と呼ばれる．この分野の哲学的な導入には [4] を，数学的なモノグラフとしては [2] などを参照せよ．

アルゴリズム的確率の最大の特徴は，すべての計算可能な規則を見つけることができるということだろう．計算量の問題を無視すれば，アルゴリズム的確率の性質を調べることにより，予測の限界について理論的な解析ができる．逆に最大の問題は最善の測度が c.e. で計算可能ではないため，アルゴリズム的確率は Δ^0_2 でしか抑えられない．そのためアルゴリズム的確率に対して示された性質が，実際に近似として実装できる予測に対しても当てはまるものなのかは分からない．

本論文では予測を表現する測度を計算可能なものに制限し，その族の中で「十分賢い」予測であれば必ず持つような性質が存在することを証明する．これにより賢い推論が持つべき性質について議論ができるようになるだけでなく，その性質を持つために必要な計算量についても議論できるようになる．

本論文では特に確認理論 (confirmation theory) への応用を想定し，古典的な「明日また太陽が昇る確率」などの例を通して議論する．

最善の測度とは「定数倍を除いて」ということなので，アルゴリズム的確率に対して示される性質もまた，それに対応する「遊び」がある．そのため確率は正確な値として出るわけではなく，収束の速度について議論できるだけである．同様に賢い計算可能測度の場合も遊びがあるが，小さい計算量の測度である程度の制限がかけられることを見よう．

表 1: 計算可能と c.e.

	最善 c.e. 測度	賢い計算可能測度
確率	Δ^0_2	計算可能
最善	存在する	存在しない
遊び	存在する	存在する

2 準備

ここでは次節で使う概念や事実をまとめる．主に使うのは計算論 (computability theory) と，ランダムネスの理論 (algorithmic randomness) である．教科書としては [5, 1] などを参照せよ．

2^ω で $\{0,1\}$ の 2 進無限列の集合を表す．その元は $A, B, X, Y \in 2^\omega$ などで表す．$A = A_0A_1A_2A_3\cdots$ であり，自然数 $n \in \omega$ に対し $A_{<n}$ で A の最初 n 桁の文字列を表す．

$2^{<\omega}$ で 2 進有限列の集合を表す．その元は $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ などで表す．2^ω には柱状集合 $[\sigma] = \{X \in 2^\omega : \sigma \prec X\}$ を開基とする位相を入れる．ここで $\prec$ は接頭関係を表す．

機械とは部分計算可能関数のことである，すなわち Turing 機械のことで，機械その機械が計算する関数とを同一視する．文字列の集合 S が**非接頭** (prefix-free) とは，S 内の異なる 2 つの元 $\sigma, \tau \in S$ をとったときに，いずれも他方の接頭辞になっていないことをいう．機械が非接

*連絡先：明治大学理工学部数学科
〒 214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1
E-mail: research@kenshi.miyabe.name

頭とはその定義域が非接頭であることをいう．接頭機械 M に対しては，Kraft の不等式 $\sum_{\sigma\in\mathrm{dom}(M)} 2^{-|\sigma|} \le 1$ が成り立つ．接頭機械 U が**万能**とは，任意の接頭機械 M に対し，ある $\sigma \in 2^{<\omega}$ が存在して，すべての $\tau \in 2^{<\omega}$ に対し，$U(\sigma\tau) = M(\tau)$ となることをいう．ただしここので等号は未定義の場合も含む．すなわち万能機械は任意の機械の動作を模倣できる．

$U(\sigma)\downarrow$ は機械 U が入力 σ に対して何らかの出力を返すことを意味し，$U(\sigma)\uparrow$ は出力を返さないことを意味する．関数としてはそれぞれ定義されている，定義されていない，ことを意味する．$U(\sigma)[s]$ は機械 U の入力 σ に対して s ステップでの計算結果を表す．

列 $A \in 2^\omega$ が**計算可能**であるとは，関数 $n \mapsto A_n$ が計算可能であることをいう．実数 $x \in \mathbb{R}$ が**計算可能**であるとは，有理数の適当な符号化のもとで，計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で，すべての n で $|x - a_n| < 2^{-n}$ を満たすものが存在することをいう．つまり入力 n に対し x の 2^{-n} 近似の有理数を返す関数が関数が存在することをいう．Cantor 空間上の Borel 測度 μ が**計算可能**であるとは，$\mu(\sigma) = \mu([\sigma]) \in \mathbb{R}$ が σ に関して一様に計算可能であることを言う．柱状集合の族は開基なので $\mu([\sigma])$ が定まれば測度 μ は定まることに注意しよう．

集合 $X \subseteq \omega$ が **c.e.**(計算枚挙可能，computably enumerable) とは，ある部分計算可能関数の定義域となることをいう．計算可能な関数 $f(n)$ と計算可能な実数 x に対し，$f(n) < x$ となる n の集合は c.e. だが，$f(n) \le x$ となる n の集合は c.e. とは限らない．計算可能な集合は c.e. である．

$J = \{\sigma \in 2^{<\omega} \ : \ U(\sigma)\downarrow\}$ は，明らかに c.e. であるが計算可能ではない．ここで U は万能接頭機械である．これは Turing による古典的な結果であるが，以下のように簡単に示せる．

まず $H = \{\langle e, n\rangle \ : \ \Phi_e(n)\downarrow\}$ が計算不可能なことを示そう．ここで Φ_e は e 番目の計算可能関数であり，$\langle e, n\rangle$ は 2 つの自然数を 1 つの自然数に符号化する対関数である．H が計算可能であるとすれば，

$$M(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } \langle e, e\rangle \notin H \\ \uparrow & \text{if } \langle e, e\rangle \in H \end{cases}$$

となる機械 M が存在する．M が計算可能であることから，$M = \Phi_{e'}$ となる $e' \in \omega$ が存在する．もし $\langle e', e'\rangle \in H$ なら，H の定義より $\Phi_{e'}(e')\downarrow$だが，一方 M の定義より $\Phi_{e'}(e') = M(e')\uparrow$で，これは矛盾．もし $\langle e', e'\angle \notin H$ なら，H の定義より $\Phi_{e'}(e')\uparrow$だが，一方 M の定義より $\Phi_{e'}(e') = M(e') = 1\downarrow$で，これも矛盾．すなわちそのような M は存在せず，H は計算不可能である．

さらに $\langle e, n\rangle$ を接頭符号化したものを $\sigma_{e,n}$ として，$M(\sigma_{e,n})\downarrow \iff \langle e, n\rangle \in H$ となるような接頭機械 M を考える．U の万能性からある $\tau \in 2^{<\omega}$ が存在して $U(\tau\sigma_{e,n})\downarrow \iff M(\sigma_{e,n})\downarrow$となる．すなわち J を使って H を計算できる．よって J も計算不可能である．

3 設定と結果

標本空間として Cantor 空間 2^ω をとる．興味の対象は，計算可能な列 $A \in 2^\omega$ に対し，$A_{<n}$ が与えられたときの A_n の確率である．特に $A = 1^\omega$ の場合に，その確率は 1 に収束するはずだが，その収束の速度を議論したい．予測は測度によって表現される．

定義 3.1. μ, ν を 2^ω 上の測度とする．ν が μ に対し**定数倍を除いて優位** (倍優位，multiplicatively dominate) であるとは，ある自然数 $c \in \omega$ が存在して，すべての $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し，

$$\mu(\sigma) \le c\nu(\sigma)$$

となることをいう．

測度とマルチンゲールの対応を考えれば，測度の値が大きいことは利得が大きいことを意味する．計算可能な列に対しては，一様測度に対するマルチンゲールは指数関数的に大きくなりうる．定数倍の誤差は資産の発散速度がほぼ同じであることを意味しているので，上の定義では ν から作られる予測が μ と比べて悪くないことを意味している．

c.e. 測度の族の中にはすべての c.e. 測度に対して倍優位となるものが存在し**最善** (optimal) [1]と呼ばれる．それに対して計算可能な測度には最善なものは存在しない．それでも，素朴に優位な測度を「賢い」と表現すれば，

賢い予測であれば必ず持つ性質は何か？

という問いは考察に値し，次のような形で数学的に議論ができる．「μ に対して倍優位なすべての計算可能な測度 ν がある性質 P をもつ」という計算可能な μ を構成できれば，十分賢い予測がその性質 P を持つことを示したことになる．性質 P, Q が測度 μ, ν により保証されれば，P かつ Q という性質が $(\mu + \nu)/2$ により保証される．更に一様に計算可能な可算個の測度によりそれぞれが保証する可算個の性質も同時に保証される．

これらの設定のもと，計算可能な列の予測確率の収束速度について調べてみよう．測度 μ, 列 $A \in 2^\omega$，自然数 $n \in \omega$ に対し，p を

$$p(\mu, A, n) = \mu(A_n | A_{<n}) = \frac{\mu(A_{\le n})}{\mu(A_{<n})}$$

および

$$q(\mu, A, n) = 1 - p(\mu, A, n)$$

[1] 万能 (universal) と呼ばれることもある

とおく．p は $A_{<n}$ が与えられたときの A_n の確率であり，q は p の 1 への収束速度を表している．

定理 3.2. $A \in 2^\omega$ を計算可能な列とする．この時，計算可能な測度 μ が存在し，μ に対して倍優位なすべての計算可能な測度 ν に対し，

$$\sum_n q(\nu, A, n) < \infty$$

特に $n \to \infty$ のとき $p(\nu, A, n) \to 1$ である．

この定理は十分賢い測度による予測は，A を正しく予測でき，その収束速度もかなり速いことを意味している．

量化の順序に気をつける必要がある．十分賢い予測がすべての計算可能な列を予測できるわけではなく，μ は A に依存する．

定理 3.3. 任意の計算可能な測度 μ に対し，計算可能な列 $A \in 2^\omega$ が存在し，$p(\mu, A, n)$ は 1 に収束しない．

p の 1 への収束速度は次のように下から抑えられる．

定理 3.4. $A \in 2^\omega$ を計算可能な列とし，$(a_n)_n$ を計算可能な正の有理数列で，$\sum_n a_n < \infty$ を満たすものとする．このとき計算可能な測度 ν が存在し，この ν に対して倍優位なすべての計算可能な測度 μ に対し，ある自然数 $C \in \omega$ が存在して，

$$q(\mu, A, n) \geq \frac{a_n}{C}$$

を満たす．

さらにこの収束は単調ではないだけでなく，上から抑える単調な計算可能な列は存在しない．

定理 3.5. $A \in 2^\omega$ を計算可能な列とする．このときある計算可能な測度 ν が存在し，ν に対して倍優位なすべての計算可能な測度 μ に対し，$q(\mu, A, n)$ に対して倍優位となるような計算可能で 0 に単調に収束する正の有理数列 $(b_n)_n$ は存在しない．

4 帰結

前節の定理たちが意味することを考察してみよう．

「明日また太陽が昇る確率」の問題を考える．n 日目に太陽が昇ることを 1，昇らないことを 0 で表す．Laplace は Bernoulli 測度のパラメータ p が 0 から 1 まで一様に取ると仮定した測度 μ を考えることで，明日太陽が昇る確率を $p(\mu, 1^\omega, n) = \frac{n+1}{n+2}$ と推定した．前節の結果では定理 (3.2) および (3.4) より，q はだいたい $\frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{1+\epsilon}}$ くらいで，Laplace の結果よりも収束が速い．これは Laplace の結果が間違っていると主張しているわけではなく，単に上記の μ よりも定数倍以上早く儲けることができる計算可能な予測が存在することを言っている．しかもこの性質を保証する測度は $O(n^2)$ くらいの時間で計算できるので，現実的な予測が持つべき性質と言ってよいのではないか．

次に「Hempel のカラス」の問題を考えよう．「すべてのカラスは黒い」という命題に対し，その同値命題「すべての黒くないものはカラスではない」は「黒くなくてカラスでないもの」を観察すれば確証性を高めることができるので，もとの命題も確証性を高めることができる．すなわちカラスを 1 羽も観察することなく，カラスに関する命題の確証性を高めることができるというパラドックスである．

F で G であるものを観察することは，命題「すべての F は G である」の確証性を高める，の論法は Nicod の規範 (Nicod's criterion) と呼ばれている．万能推論の文脈でも Nicod の規範は成り立たない [3]．定理 (3.5) より，1^ω という計算可能な列の計算可能な測度による予測ですら単調ではありえず，Nicod の規範は成り立たない．

定理 (3.5) の証明によれば，n の Kolmogorov 複雑性が非常に小さくなるときに $q(\mu, A, n)$ が大きくなる．このことは grue のパラドックスを思い起こさせる．例えばその日に消費税が 10% 以上かどうかを 0 か 1 で表す列であれば，切りの良い日付を表す複雑性が小さい n で予測が揺れるだろう．ある人が 20 歳以上かどうかを 0 か 1 で表す列であれば，変化が起こる可能性のある n の数が多すぎて $q(\mu, A, n)$ は大きくはなれないが，0 からは離れている．

同値命題の確証性についてや grue のパラドックスそのものの表現については，より複雑な設定での解析が必要なように思われる．

5 証明

定理 3.2 の証明. ν を点 $A \in 2^\omega$ に対する点測度 (Dirac 測度) とする．ν は計算可能である．μ を ν に対して倍優位な計算可能な測度とする．$C \in \omega$ をすべての $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し $\nu(\sigma) \leq C\mu(\sigma)$ を満たすものとする．このとき，すべての $n \in \omega$ に対し，

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\mu(A_{\leq k})}{\mu(A_{<k})} = \mu(A_{\leq n}) \geq \frac{\nu(A_{\leq n})}{C} = \frac{1}{C}$$

さらに，

$$\sum_n \log(1 - q(\mu, A, n)) > -\infty \iff \sum_n q(\mu, A, n) < \infty$$

より題意が成立する． □

定理 *3.3* の証明．$(\epsilon_n)_n$ を計算可能な正の有理数列で，すべての n で $\epsilon_n < \frac{1}{2}$，$\prod_n(1+\epsilon_n) < \infty$ を満たすものとする．任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し，$i \in \{0,1\}$ のうち少なくともどちらか 1 つは，

$$\mu(\sigma i) < \frac{1+\epsilon_{|\sigma|}}{2}\mu(\sigma)$$

を満たす．更にこの関係は c.e. なのでそのような i は σ から一様に計算できる．この操作を繰り返すことにより，計算可能な列 $A \in 2^\omega$ で，すべての n で

$$\mu(A_{\leq n}) < \frac{1+\epsilon_n}{2}\mu(A_{<n})$$

を満たすようなものが構成できる．$\epsilon_n \to 0$ より，

$$\limsup_n p(\mu, A, n) \leq \limsup_n \frac{1+\epsilon_n}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

すなわち p は 1 に収束しない． □

定理 *3.4* の証明．一般性を失わず，$s = \sum_n a_n < 1$ を仮定して良い．測度 ν を

$$\nu = \sum_n a_n \mathbf{1}_{A_{<n}\widehat{A_n}0^\omega} + (1-s)\mathbf{1}_A$$

として定義する．ここで $\mathbf{1}_X$ は X に対する点測度で，$\widehat{A_n} = 1 - A_n$ である．

ν が計算可能であることを示そう．$\nu(\sigma)$ が σ から一様に計算できることを示せば良い．$\sigma \prec A$ であれば，

$$\nu(\sigma) = \sum_{n \geq |\sigma|} a_n + 1 - s = 1 - \sum_{n<|\sigma|} a_n$$

である．$\sigma = A_{<k}\widehat{A_k}0^i$ となる $k, i \in \omega$ が存在すれば，$\nu(\sigma) = a_k$ である．$\sigma = A_{<k}\widehat{A_k}0^i1\tau$ となる $k, i \in \omega$ および $\tau \in 2^{<\omega}$ が存在すれば，$\nu(\sigma) = 0$ である．この場合分けは計算可能に行なえ，いずれの場合も $\nu(\sigma)$ は σ から計算可能である．

計算可能な測度 μ が ν に対して倍優位であるとしよう．ある $C \in \omega$ が存在して，すべての $\sigma \in 2^{<\omega}$ で，$\nu(\sigma) \leq C\mu(\sigma)$ となる．このとき，

$$\begin{aligned} q(\mu, A, n) =& 1 - \frac{\mu(A_{\leq n})}{\mu(A_{<n})} = \frac{\mu(A_{<n}\widehat{A_n})}{\mu(A_{<n})} \\ \geq& \frac{\nu(A_{<n}\widehat{A_n})}{C} = \frac{a_n}{C} \end{aligned}$$

□

定理 *3.5* の証明．$U :\subseteq 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ を万能接頭機械とする．慣習どおり，$s < |\sigma|$ のときは $U(\sigma)[s]\uparrow$ とする．各 n で，

$$a_n = \sum_\sigma \{2^{-|\sigma|} \ :\ U(\sigma)\downarrow \text{ at } n\}$$

とおく．$(a_n)_n$ は計算可能な有理数列となる（加えられる可能性のある U の仮定より σ は $|\sigma| \leq n$ を満たす）．さらに，

$$\sum_n a_n = \sum_{\sigma \in \mathrm{dom}(U)} 2^{-|\sigma|} < 1$$

である．よって定理 3.4 より，計算可能な測度 ν が存在して，ν に対して倍優位なすべての計算可能な測度 μ に対して，$q(\mu, A, n)$ が $(a_n)_n$ に対して倍優位となる．

計算可能で単調に 0 に収束する正の有理数列 $(b_n)_n$ で，$q(\mu, A, n)$ に対して倍優位となるものが存在したとする．$(b_n)_n$ は a_n に対しても倍優位となるので，ある $C \in \omega$ が存在して，すべての n で $a_n \leq 2^C b_n$ となる．

このとき U に対する停止問題が計算可能であることを示して矛盾を示そう．各 $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して，$b_k < 2^{-|\sigma|-C}$ を満たす最小の k を探す．$(b_n)_n$ は 0 に収束しているのでこのような k は必ず存在し，σ から一様に計算できる．$U(\sigma)[k]\uparrow$ かつ $U(\sigma)[s]\downarrow$ となる $s > k$ が存在すれば，$(a_n)_n$ の定義より

$$a_s \geq 2^{-|\sigma|}$$

となるが，$(b_n)_n$ が単調であることから

$$a_s \leq 2^C b_s \leq 2^C b_k < 2^{-|\sigma|}$$

となって矛盾である．よって $U(\sigma)\downarrow \iff U(\sigma)[k]\downarrow$ であることが分かる．しかしこれは停止問題が計算可能であることを意味し，矛盾である．

よって，仮定したような $(b_n)_n$ は存在しない． □

参考文献

[1] R. G. Downey and D. R. Hirschfeldt. *Algorithmic randomness and complexity.* Theory and Applications of Computability. Springer, New York, 2010.

[2] M. Hutter. *Universal artificial intelligence: Sequential decisions based on algorithmic probability.* Springer, 2005.

[3] J. Leike and M. Hutter. Solomonoff induction violates nicod's criterion. In K. Chaudhuri, C. Gentile, and S. Zilles, editors, *Algorithmic Learning Theory. ALT 2015.*, volume 9355 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2015.

[4] S. Rathmanner and M. Hutter. A Philosophical Treatise of Universal Induction. *Entoropy*, 13:1076–1136, 2011.

[5] R. I. Soare. *Turing Computability.* Theory and Applications of Computability. Springer, 2016.