# 還元とランダム性の整合性

宮部賢志@明治大学

2019 年 3 月 18 日@日本数学会

# はじめに

# よりランダムとは

様々なランダムの概念

$$\mathrm{KR} \supset \mathrm{SR} \supset \mathrm{CR} \supset \mathrm{MLR} \supset \mathrm{DiffR} \begin{array}{ccc} \supset & \mathrm{W2R} & \supset \\ \supset & \mathrm{DemR} & \supset \end{array} \mathrm{2R}$$

ランダム性に関わる還元の概念
例えば，$K$ 還元は非接頭機械を使う：

$$A \leq_K B \iff K(A \upharpoonright n) \leq K(B \upharpoonright n) + O(1).$$

考える機械の族を変えて，$C$ 還元, Schnorr 還元，dm 還元 (decidable machine)，tm 還元 (total machine) などが定義される.

# 整合性

これらは整合的とは限らない.

定義 **1.** ランダム性を比較する還元 $\leq_r$ とランダムの概念 $R$ に対して,

$$(\forall A, B \in 2^\omega) A \leq_r B \wedge A \in R \Rightarrow B \in R$$

が成り立つとき, $\leq_r$ は $R$ と整合的 (coherent) であるという.

| | KR | SR | MLR | 2R | nR |
|---|---|---|---|---|---|
| **K還元** | No | No | Yes | Yes | Yes |
| **C還元** | No | No | Yes | Yes | Yes |
| **Sch還元** | Yes | Yes | No | No | No |
| **dm還元** | Yes | Yes | Yes | Yes | Yes |
| **tm還元** | Yes | Yes | Yes | Yes | Yes |

Figure 1: 還元とランダム性の整合性

# 解釈

- $K$ や $C$ で $\mathrm{MLR}$ や $n$-ランダム性が特徴づけられること，$\mathrm{CR}$ 以下との相性が悪いことなどは，表現の仕方はともかく，よく知られていた．
- Schnorr 還元と $\mathrm{CR}$ 以上のランダム性が非整合であることは新しい結果で，証明もかなり込み入っている．
- 決定可能機械 (prefix-free decidable machine) は多くのランダム性を特徴づけることが知られていた．それに対し，全域機械 (total machine) が多くのランダム性を特徴づけることはあまり認識されてこなかったと思う．特に dm 還元や tm 還元が vL 還元を導くのは面白い結果だと思う．

# Schnorr 還元

# *Schnorr* ランダム性

接頭機械 $M :\subseteq 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ の測度とは，

$$\sum_{\mathrm{dom}(M)} 2^{-|\sigma|}$$

のこと．$M$ が万能のときには，Chaitin の $\Omega$ と呼ばれる量で，ML ランダムになる．

命題 **2.** $A \in 2^{\omega}$ に関して以下は同値：

(i) $A$ は *Schnorr* ランダム．

(ii) すべての計算可能な測度を持つ接頭機械 $M$ に対し $K_M(A \upharpoonright n) > n - O(1)$

# Schnorr還元

定義 **3.** $A \leq_{Sch} B$ とは，すべての c.m.m. $M$ に対し，ある c.m.m. $N$ が存在して，

$$K_N(A \upharpoonright n) \leq K_M(B \upharpoonright n) + O(1)$$

となること

c.m.m.
=computable measure machine
=計算可能測度機械

# 計算可能ランダム

$d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^+$ がマルチンゲールとは,

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

を満たすことをいう.

$A$ が計算可能ランダムとは，すべての計算可能マルチンゲール $d$ に対し，$\sup_n d(A \restriction n) < \infty$ となることをいう.

$A \in 2^\omega$ が Schnorr ランダムでないことと，ある計算可能なマルチンゲール $d$ と計算可能な非減少非有界関数 $f : \omega \to \omega$ が存在して，無限に多くの $n$ で $d(A \restriction f(n)) > n$ となることは同値.

# 主定理

定理 **4.** すべての列 $A \in 2^\omega$ に対し，$A \leq_{Sch} B$ となる計算可能ランダムでない $B \in 2^\omega$ が存在する．

$A$ が Schnorr ランダムなら，$B$ も Schnorr ランダム．
証明は Schnorr ランダムと計算可能ランダムの分離の手法を拡張する．
$A$ の列のうち「任意の計算可能関数よりも稀な部分」を $0$ と置き換える．
その候補は計算可能に見つけれるようにして，その候補の数が十分小さければ，いわゆる「マルチンゲール戦略」により計算可能ランダムでないことが示せる．
また極稀なので複雑性の差は十分小さく，c.m.m. に万能性がないことから，Schnorr 還元性が示せる．

# dm 還元と tm 還元

# *dm* 還元と *tm* 還元

定理 **5.** $X, Z \in 2^\omega$ に関して以下は同値*:*

(i) $X \oplus Z$ が *ML* ランダムである*.*

(ii) すべての接頭決定可能機械 $M$ に対し*,*
$K_M(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > (Z \upharpoonright n) + n - O(1)$ が成り立つ*.*

定理 **6.** $Z$ を *ML* ランダムな列とする． $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値*:*

(i) $X$ が $Z$-*ML* ランダムである*.*

(ii) すべての全域機械 $M$ に対し*,*
$C_M(X \upharpoonright n) + K(Z \upharpoonright n) \geq 2n - O(1)$ が成り立つ*.*

# 終わり

ありがとうございました

明治大学
MEIJI UNIVERSITY