

還元とランダム性の整合性

宮部賢志 (明治大学理工学部数学科)*

1. 還元の整合性

ランダム性を比較する還元として最もよく知られているのが以下の K 還元である。 $A, B \in 2^\omega$ に対して、 $A \leq_K B$ であるとは、

$$K(A \upharpoonright n) \leq K(B \upharpoonright n) + O(1)$$

であることを意味する。ここで、 K は接頭コルモゴロフ複雑性である。すなわち、 B の n 桁の接頭 $B \upharpoonright n$ がある程度圧縮できたならば、 A の最初の n 桁 $A \upharpoonright n$ も、定数を除いて同程度、圧縮できることを意味している。大雑把に言えば、 B の方が A よりもランダムである。

$A \leq_B$ かつ A が ML ランダムであれば、Levin-Schnorr の定理より、 B も ML ランダムである。しかし、 $A \leq_B$ かつ A が Schnorr ランダムでも、 B が Schnorr ランダムとは限らない。

定義 1.1. ランダム性を比較する還元 \leq_r とランダム概念 R に対して、

$$(\forall A, B \in 2^\omega) A \leq_r B \wedge A \in R \Rightarrow B \in R$$

が成り立つとき、 \leq_r は R と整合的 (coherent) であるという。

\leq_K は ML ランダム性と整合的であるが、Schnorr ランダム性とは整合的ではない。

2. 結果

様々な還元と様々なランダム性の組について、整合的であるかどうかを調べた。考察したランダム性は、Kurtz ランダム、Schnorr ランダム、ML ランダム、2 ランダム、 n ランダムである。それぞれ KR, SR, MLR, 2R, nR で表す。還元性は、K 還元、C 還元、Schnorr 還元、dm 還元、tm 還元である。Schnorr 還元は計算可能測度機械 (computable measure machine) から、dm 還元は接頭決定機械 (prefix-free decidable machine) から、tm 還元は全域機械 (total machine) から、それぞれ自然に導かれる還元である。

すべての結果をまとめると図2のようになる。Yes は整合的であることを意味し、No は整合的でないことを意味する。

多くの結果はすでに知られている特徴付けからすぐに分かることである。一方で、いくつかの結果は非自明で、既存の結果や証明を拡張・修正する必要があった。

定理 2.1. すべての列 $A \in 2^\omega$ に対し、 $A \leq_{Sch} B$ となる計算可能ランダムでない $B \in 2^\omega$ が存在する。

この定理の証明は Schnorr ランダム性と計算可能ランダム性の分離 [3] の拡張と見ることが出来る。このことから、Schnorr 還元と n ランダム性 ($n \geq 1$) が整合的でないことが分かる。

* 〒214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1 明治大学理工学部数学科
e-mail: research@kenshi.miyabe.name
web: <http://kenshi.miyabe.name/wordpress/>

	KR	SR	MLR	2R	nR
K還元	No	No	Yes	Yes	Yes
C還元	No	No	Yes	Yes	Yes
Sch還元	Yes	Yes	No	No	No
dm還元	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
tm還元	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

図 1: 還元とランダム性の整合性

定理 2.2. $X, Z \in 2^\omega$ に関して以下は同値:

- (i) $X \oplus Z$ が ML ランダムである.
- (ii) すべての接頭決定可能機械 M に対し, $K_M(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > (Z \upharpoonright n) + n - O(1)$ が成り立つ.

定理 2.3. Z を ML ランダムな列とする. $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値:

- (i) X が Z - ML ランダムである.
- (ii) すべての全域機械 M に対し, $C_M(X \upharpoonright n) + K(Z \upharpoonright n) \geq 2n - O(1)$ が成り立つ.

これらの定理において, K_M を K で, C_M を C で置き換えたものが, Miller-Yu [1] により示されている. それらの結果からは, K還元やC還元がvL還元が導かれる. 同様に上記の結果から, dm還元やtm還元がvL還元を導くことがわかり, n ランダム性 ($n \geq 2$) と整合的であることが分かる.

以上の結果の詳細は, [2] を参照せよ.

参考文献

- [1] J. S. Miller and L. Yu. On initial segment complexity and degrees of randomness. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360:3193–3210, 2008.
- [2] K. Miyabe. Coherence of reducibilities with randomness notions. *Theory Comput. Syst.*, 62(7):1599–1619, 2018.
- [3] A. Nies, F. Stephan, and S. Terwijn. Randomness, relativization and Turing degrees. *Journal of Symbolic Logic*, 70:515–535, 2005.