逆ランダム
〜 確率 **0** のところでは何が起こるのか 〜

宮部賢志 @ 明治大学

2019 年 11 月 8 日 (金) 京都大学数理情報論分野談話会

イントロ

Weyl の一様分布定理

$\{x\}$ で x の小数部分を表す.
α が有理数ならば, $(\{\alpha n\})_{n\in\mathbb{N}}$ は循環する.

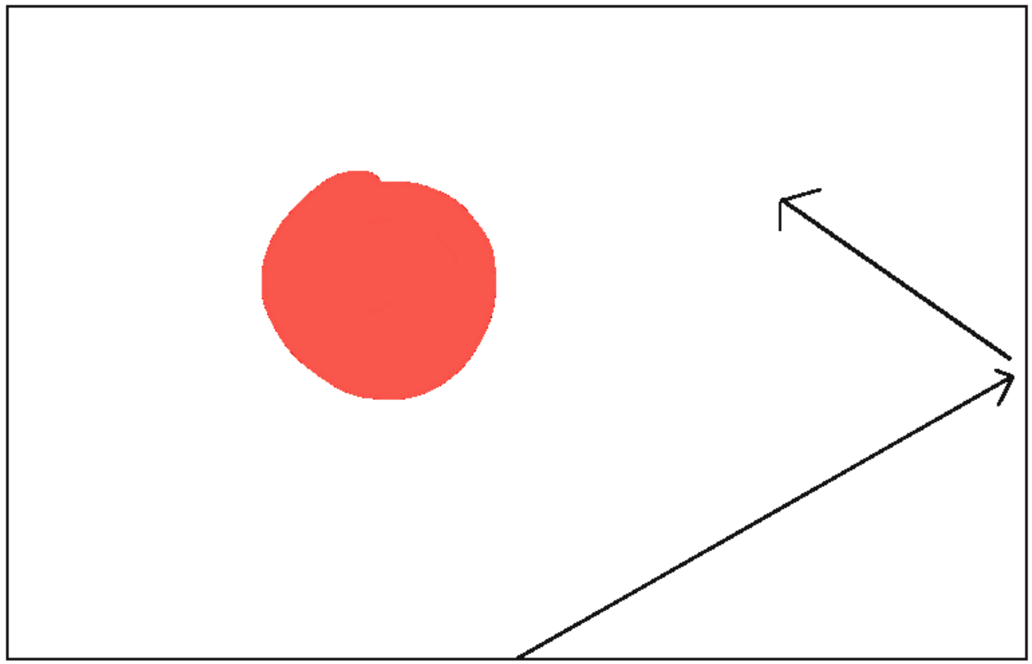
定理 1 (Weyl の一様分布定理)**.** α が無理数ならば,
$(\{\alpha n\})_{n\in\mathbb{N}}$ は $[0,1]$ 上一様分布する.

「ルベーグ測度 1 で一様分布する」
と表現しても数学的に間違いではないが,
それだけではこの現象を十分に理解したとは言えない.
「どんな初期点」でその現象が起こるのかを理解したい.
無理数は最も弱いランダム性.

様々なランダム性


2ランダム性
弱2ランダム性
Demuthランダム性
弱Demuthランダム性
差ランダム性
MLランダム性
計算可能ランダム性
Schnorrランダム性
Kurtzランダム性
正規数
無理数

エルゴード定理–図



ほとんどの出発角度について，
赤い部分の面積割合=赤い部分を通っている時間割合
空間平均=時間平均

エルゴード定理–主張

定理 2 (離散版エルゴード定理 by Birkhoff)**.** 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ とエルゴード的写像 $T : X \to X$，可測集合 $A \in \mathcal{F}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leq k \leq n-1,\ T^k(x) \in A\}| = \mu(A)$$

が μ 測度 1 の点 x について成り立つ.

特に $\mu(A) > 0$ ならば無限個の k で $T^k(x) \in A$ となる．これはポアンカレの回帰定理と言われる.

ランダム性による特徴づけ

定理 3 (例えば Downey-Nandakumar-Nies 2016). *Cantor* 空間 2^ω 上のシフト写像 T と一様測度 μ を考える．$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値.

(i) $X \in 2^\omega$ が Δ ランダムである.

(ii) すべての $\mathcal{C}$ 集合 A に対し，$\mu(A) < 1$ なら無限個の n で $T^n(X) \in A^c$ である.

Δ	$\mathcal{C}$
ML	c.e.
Schnorr	計算可能な測度を持つ c.e.
Kurtz	clopen

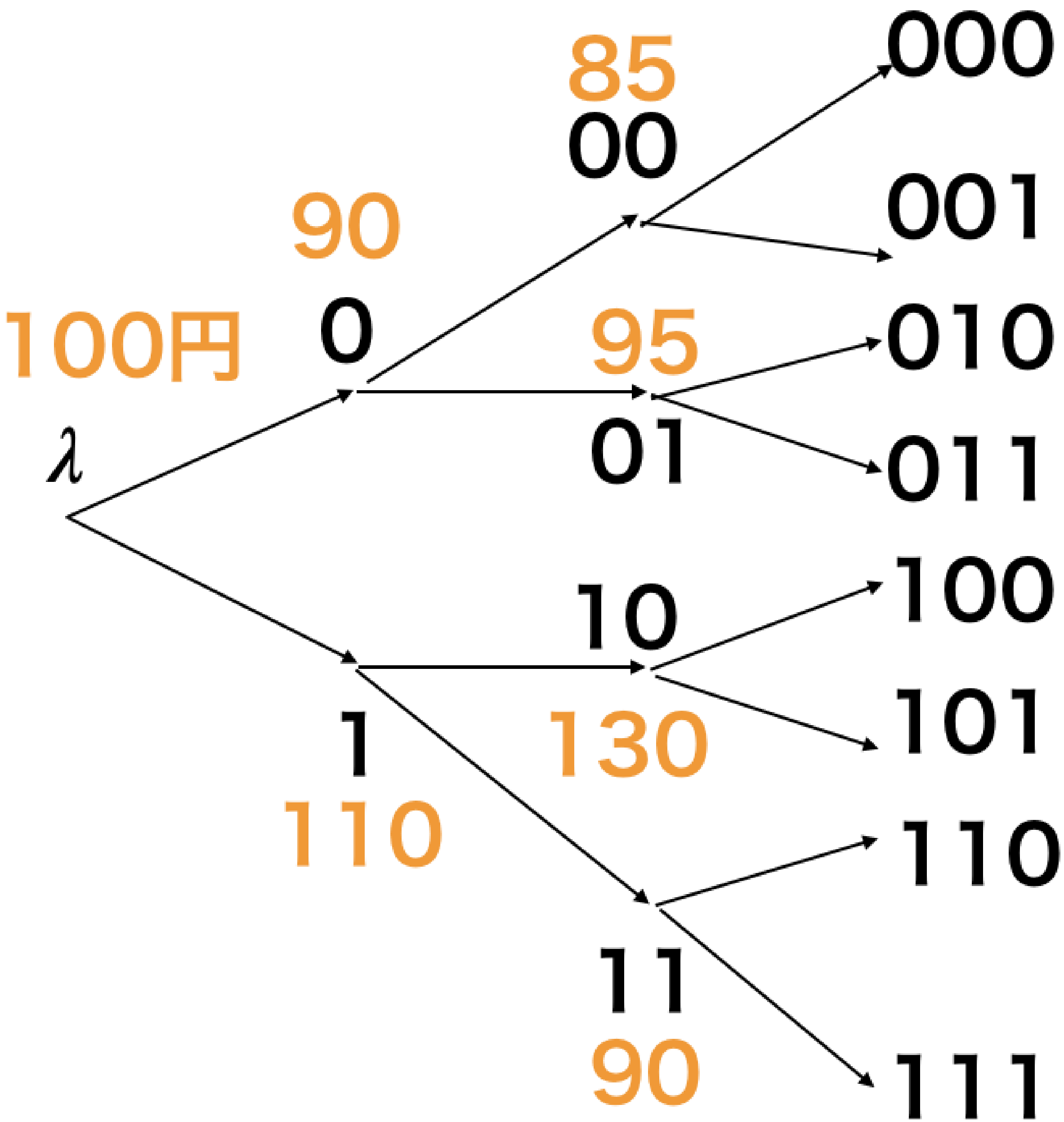
何を意味するか

(i)⇒(ii).
力学系の結果に関して，可測集合の複雑さに応じて，主張が成り立つのに十分なランダム性を明らかにしている．

(ii)⇒(i).
ランダムでなければ，主張が成り立たないような集合が存在する．
(ii) という主張はランダム性を特徴づけることができるような一般性を有している．
例えば大数の法則はランダム性を特徴づけることができない．
定理が成り立つのに必要なランダム性を解析するプログラムは「逆ランダム (reverse randomness)」と呼ばれる．

マルチンゲール

賭けゲーム


85
00
000
001
90
0
100円
λ
95
010
01
011
10
100
1
130
101
110
110
11
90
111

マルチンゲール

定義 4 (Ville 1939)**.** マルチンゲールとは関数 $M : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で，すべての $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し，

$$M(\sigma) = \frac{M(\sigma 0) + M(\sigma 1)}{2} \tag{1}$$

が成り立つもののこと.

(1) は fairness-condition と呼ばれる.
確率論での定式化と見た目は異なるが同じことを言っている.

ランダムとは

あるマルチンゲールで資金を無限に増やせるなら，その列は規則がある．
すべてのマルチンゲールで資金が有限に留まるなら，その列はランダムである．
$X \in 2^\omega$ が Δ ランダムであるとは，すべての $\mathcal{C}$ マルチンゲール M に対して $\sup_n M(X \upharpoonright n) < \infty$ であること．

(i) $\mathcal{C}$ にどう依存するか
(ii) sup を $\liminf$ や lim に置き換えたらどうなるか
(iii) M の発散速度とランダム性の関係

定理 **5** (Ville, Doob)**.** それぞれのマルチンゲール M に対し，測度 1 の X で $\lim_n M(X \upharpoonright n)$ が存在する.

注意 6*.* ここではマルチンゲール M は非負.

族 $\mathcal{C}$ が可算であれば,「すべての $\mathcal{C}$ マルチンゲール M に対し $\lim_n M(X \upharpoonright n)$ が存在する」ような X の集合の測度が 1. だから計算可能性を考えない設定では，前ページの問いは意味がない.

マルチンゲールによる特徴づけ

定理 7 (Schnorr '71, Bienvenu-Merkle)**.**

$$X \in \mathrm{MLR} \iff \forall M : \textit{c.e.} \sup_n M(X \upharpoonright n) < \infty$$

$$X \in \mathrm{CR} \iff \forall M : \textit{comp.} \sup_n M(X \upharpoonright n) < \infty$$

$$X \in \mathrm{SR} \iff \forall M : \textit{comp.} \forall f : \textit{order} \forall^\infty n M(X \upharpoonright n) < f(n)$$

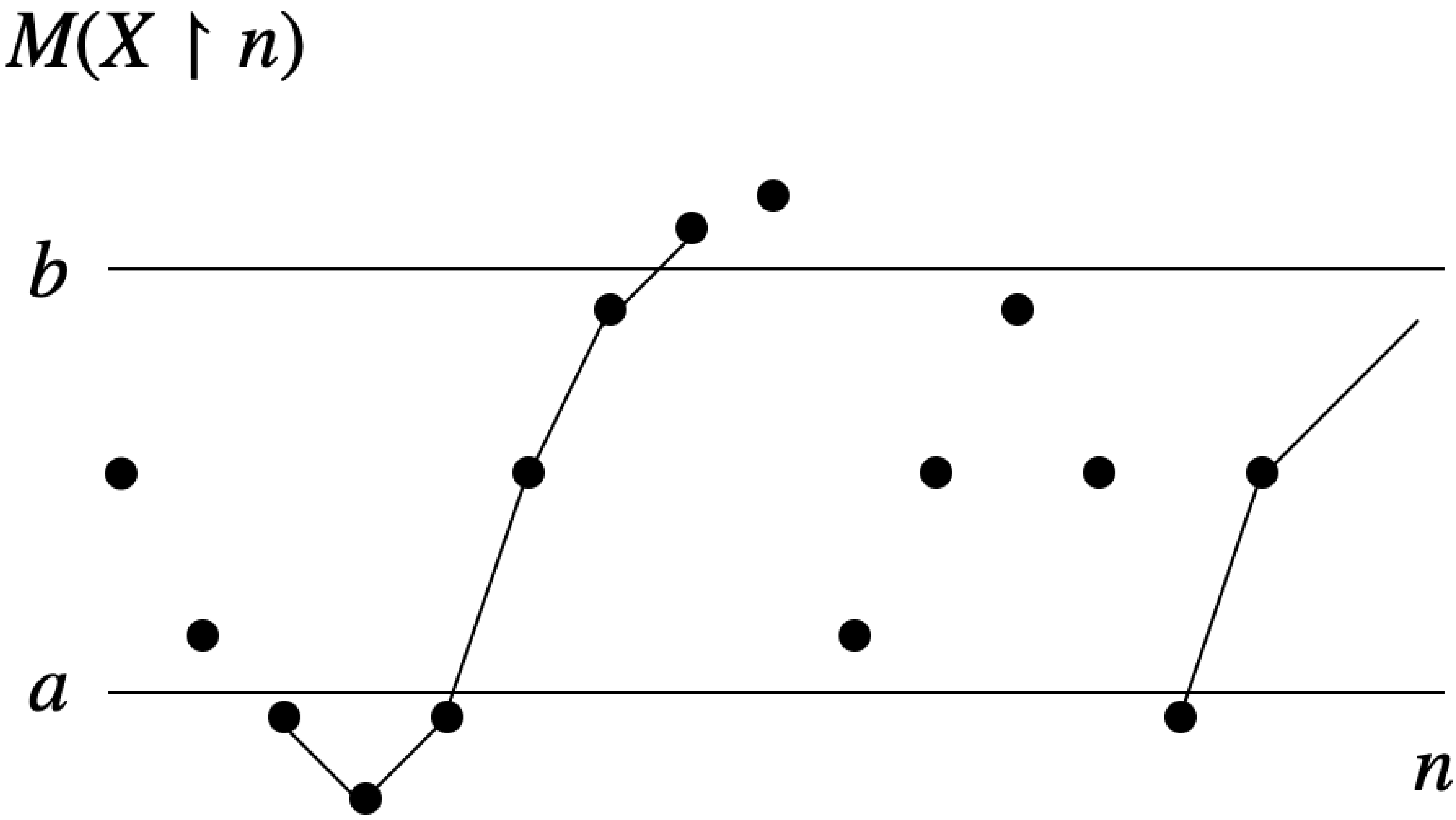
$$X \in \mathrm{KR} \iff \forall M : \textit{comp.} \forall f : \textit{order} \exists^\infty n M(X \upharpoonright n) < f(n)$$

CR の場合

定理 **8** (Folklore)**.**
$X \notin \mathrm{CR}$ ならば $\exists M$ *:comp.* $\lim_n M(X \restriction n) = \infty$.
$X \in \mathrm{CR}$ ならば $\forall M$ *:comp.* $\lim_n M(X \restriction n)$ が有限で存在.

最も強い形で成立する.

上向き横断補題



CR の場合 2

確率論の収束定理では，結論は「確率 1 で収束する」

$X \in \mathrm{CR}$ とする．
定義からすべての計算可能マルチンゲール M について，
$\sup_n M(X \upharpoonright n) < \infty$.
もし $M(X \upharpoonright n)$ が収束しないならば振動する．
よって別の計算可能マルチンゲール N が存在して，
$\lim_n M(X \upharpoonright n) = \infty$.

密度ランダム性

c.e. マルチンゲールとは計算可能なマルチンゲールの計算可能な可算和で書けるマルチンゲールのこと．
c.e. マルチンゲールについては，この上向き横断補題が成立しない．つまり作られるマルチンゲールが計算可能でもc.e. でもない．

定理 **9.** $M(X \upharpoonright n)$ が収束しないような *c.e.* マルチンゲール M と $X \in \mathrm{MLR}$ の組が存在する．

c.e. マルチンゲールに対する収束により特徴づけられるランダム性は密度ランダム性 (density randomness) と呼ばれている．Π^0_1 クラスに対して Lebesgue の密度定理が成り立つ ML ランダムな列と同値．

証明

$\Omega = \sum_{\sigma \in \mathrm{dom}(U)} 2^{-|\sigma|}$ を左 c.e. の ML ランダム実数とする.

$$M(\sigma) = 2^{|\sigma|}\mu([\sigma] \cap [0, \Omega))$$

は c.e. マルチンゲールである.
しかし Ω が正規数であることから,

$$M(\Omega \upharpoonright n) = 2^{n}\mu([\Omega \upharpoonright n] \cap [0, \Omega))$$

は, 0 から 1 までの値を一様に分布する.

Savings trick 1

定理 **10** (Folklore). 任意の *c.e.* マルチンゲール M に対して，別の *c.e.* マルチンゲール N が存在して，

$$\sup_n M(X \upharpoonright n) = \infty \iff \lim_n M(X \upharpoonright n) = \infty$$

が成り立つ．N として，任意の $\epsilon > 0$ に対し，

$$\forall \sigma, \tau \in 2^{<\omega} N(\sigma\tau) \geq N(\sigma) - \epsilon \qquad (2)$$

を満たすようにできる．

Savings trick 2

単純のため $\epsilon = 2$ の場合を考える.
M の初期資金は $1 \le M(\lambda) \le 2$ を満たすと仮定して良い.
N は最初は M と同じように賭ける.
N の資金が 2 を超える場所を見つけたら，そのうちの 1 を貯金に回して，残りの額を M と同じ比率で賭ける.

リスク資産は常に 2 以下なので，(2) が成り立つ.
$\sup_n M(X \upharpoonright n) = \infty$ の X に対しては，無限回 1 を貯金に回すので，$\lim_n N(X \upharpoonright n) = \infty$.
逆に無限回 1 を貯金に回すなら，$\sup_n M(X \upharpoonright n) = \infty$ を意味する.

M が c.e. なら，N も c.e. とできる.

整数値マルチンゲール

ちなみに，マルチンゲールの値が整数値となるものに限ると，savings trick は成り立たないことが知られている．savings trick にはいくらでも小さい額を賭けることができるという性質が重要．

収束速度

大数の法則

定理 11 (大数の法則 (Strong Law of Large Numbers, SLLN) Borel 1901)**.** X_n が独立同分布の確率変数列で, $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ とする． $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく．確率 *1* で,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

が成り立つ.

重複対数の法則

定理 **12** (重複対数の法則 (Law of the Iterated Logarithm, LIL) Khinchin 1924). X_n が独立同分布の確率変数列で，$P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ とする． $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく． 確率 *1* で，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1$$

が成り立つ．

LIL は SLLN の収束速度を与えている．

ランダムな列に対する *LIL*

定理 **13** (?)**.** 各 *Schnorr* ランダムな列に対して，*LIL* は成立する.

注意 14. 0,1 の値なので，適当な scaling は必要.

注意 15. ML ランダム列について LIL が成立することは古くから知られていた.
ほぼ同じ証明が Schnorr ランダムな列に対しても成り立つことは，みんな信じてきたが，誰も証明を出版していない？

収束の速度

任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きな n では，

$$\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} < 1 + \epsilon$$

ではどのくらい大きければ良いのか？
一様には与えられないが，ランダムな列ごとには決まる．

randomness deficiency

- 万能検定 $(U_n)_n$ に対して，$X \notin U_n$ となる最小の n
- すべての n で $K(X \upharpoonright n) > n - d$ を満たす最小の d
- 最適 c.e. 優マルチンゲール M に対して，$\sup_n M(X \upharpoonright n)$

これらの量は randomness deficiency と呼ばれ，ランダムな列の中に含まれる非ランダムさの量を表す．
この量は大数の法則における収束の遅さの上限になる．
(Hoyrup-Rojas らの結果)

CR

大数の法則の収束速度は，計算可能に抑えられ，定数部分だけが randomness deficiency に依存する．

定理 **16** (Ackerman-Freer-Roy)**.** $X \in \mathrm{CR}$ と計算可能マルチンゲール M に対して，$M(X \upharpoonright n)$ の収束は計算可能な関数で抑えることができない．特に，すべての $X \in 2^\omega$ に対して，$\lim_n M(X \upharpoonright n) \equiv_T X'$ となる計算可能マルチンゲールが存在する．

関数 $X \mapsto \lim_n M(X \upharpoonright n)$ の計算可能性と収束速度には深い関係がある．

$f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ の計算可能性について議論する.
$f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{(b_i,c_i)}$(有限和) と書ける関数を rational step function と呼ぶ.
$L^1 = \{f \ : \ \int_{[0,1]} f d\mu < \infty\}$ の中で RSF は可算な稠密集合となる.
計算可能な RSF の列 $(f_n)_n$ で $||f_{n+1} - f_n||_1 < 2^{-n}$ となるものに対して,

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

と書ける関数 $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ を L^1 計算可能関数と呼ぶ.

L^1 計算可能性 2

L^1 計算可能関数は測度 0 の部分で定義されない (かも)

定理 17 (Pathak-Rojas-Simpson, Rute, Miyabe)**.**
$x \in [0,1]$ に関して以下は同値.

(i) x が *Schnorr* ランダム.
(ii) すべての L^1 計算可能関数 f に対して，$f(x)$ が定義される.

定理 18. f, g が L^1 計算可能関数とする．以下は同値.

(i) すべての $x \in \mathrm{SR}$ に対して $f(x) = g(x)$
(ii) ほとんど至るところ $f(x) = g(x)$

測度 0 の違いによる同一視はいらない！

L^1 計算可能マルチンゲール

M が L^1 計算可能マルチンゲールとは，ある L^1 計算可能関数 $f : 2^\omega \to \mathbb{R}$ に対して，

$$M(\sigma) = \frac{1}{\mu([\sigma])} \int_{[\sigma]} f \, d\mu$$

となること．L^1 計算可能マルチンゲールは計算可能マルチンゲールだが逆は成り立たない．

定理 19 (Rute)**.** $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) $X \in \mathrm{SR}$

(ii) すべての L^1 計算可能マルチンゲール M に対して，$\lim_n M(X \upharpoonright n)$ が存在する．

収束速度

すべての L^1 計算可能マルチンゲール M に対して，
$M(X \upharpoonright n)$ の収束の速度は計算可能に抑えられる．
このことから，$X \mapsto \lim_n M(X \upharpoonright n)$ が L^1 計算可能関数となる．
特に $\lim_n M(X \upharpoonright n) \leq_T X$．

エルゴード定理–再訪 *1*

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$，エルゴード的写像 $T : X \to X$

定義 20. 可測集合 $A \in \mathcal{F}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leq k \leq n-1,\ T^k(x) \in A\}| = \mu(A)$$

が成り立つ点 x を，A に対する Birkhoff 点と呼ぶ.

A が c.e. で計算可能な測度を持つとき，

$$x \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leq k \leq n-1,\ T^k(x) \in A\}|$$

は L^1 計算可能関数となる.

エルゴード定理–再訪 *2*

定理 **21** (originally Hoyrup-Rojas). $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値.

(i) $X \in \mathrm{SR}$

(ii) X はすべての計算可能な測度を持つ *c.e.* 集合に対して *Birkhoff* 点となる.

Hausdorff 次元

古典的定義

$A \subseteq \mathbb{R}$ に対し，I を $\mathbb{R}$ 上の区間として，s 次元測度を，

$$H^s(A) = \inf\{\sum_{i\in\omega} |I_i|^s \ : \ A \subseteq \bigcup_i I_i\}$$

により定義し，A の Hausdorff 次元を，

$$\dim(A) = \inf\{s \geq 0 \ : \ H^s(A) = 0\}$$

で定義する．

Cantor 空間での定義

$\mu_s([\sigma]) = 2^{-s|\sigma|}$ とおく．
$A \subseteq \mathbb{R}$ に対し，

$$H^s_n(A) = \inf\{\sum_{\sigma \in D} \mu_s([\sigma]) \ : \ A \subseteq \bigcup_{\sigma \in D} [\sigma],\ D \subseteq 2^{\geq n}\}$$

として，

$$H^s(A) = \lim_n H^s_n(A)$$

とする．A の Hausdorff 次元は，同様に，

$$\dim(A) = \inf\{s \geq 0 \ : \ H^s(A) = 0\}$$

で定義される．

マルチンゲールによる特徴づけ

定理 22 (Lutz). $A \subseteq 2^\omega$ に対し，以下は同値.

(i) $r = \dim(A)$

(ii) $r = \inf\{s \in \mathbb{Q} \ : \ \exists M :$ マルチンゲール $\forall X \in A[\limsup_n \frac{M(X\restriction n)}{2^{(1-s)n}} = \infty]\}$

$s = 1$ では，すべての $X \in A$ で成功するマルチンゲールが存在することを意味する.

$s = 1/2$ では，すべての $X \in A$ で M の発散速度が $2^{n/2}$ よりも速いことを意味する.

$s = 0$ では，すべての $X \in A$ で M の発散速度が 2^n よりも速いことを意味し，それは不可能.

実効化

実効的 Hausdorff 次元 (effective Hausdorff dimension) が，これらの概念に計算可能性を課することで得られる．
実効化すると，1 点 $A \in 2^\omega$ の実効的 Hausdorff 次元が正となることがありうる．

定理 23 (Mayordomo). $A \in 2^\omega$ に対し，

$$\mathrm{cdim}(A) = \liminf_n \frac{K(A \upharpoonright n)}{n}$$

定理 24 (Lutz-Lutz 2018). $A \subseteq 2^\omega$ に対し，

$$\dim(A) = \min_{Z \in 2^\omega} \sup_{X \in A} \mathrm{cdim}^Z(X)$$

実効化パッキング次元

$A \subseteq 2^\omega$ に対し，$\dim_P(A)$ で A のパッキング次元を表す．

定理 **25.** $A \in 2^\omega$ に対し，

$$\mathrm{cdim}_P(A) = \limsup_n \frac{K(A \upharpoonright n)}{n}$$

定理 **26** (Lutz-Lutz 2018)**.** $A \subseteq 2^\omega$ に対し，

$$\dim_P(A) = \min_{Z \in 2^\omega} \sup_{X \in A} \mathrm{cdim}_P^Z(X)$$

フラクタル次元とは部分ランダム性 (partial randomness) の研究と深い関係がある．

End

Thank you for listening.

明治大学
MEIJI UNIVERSITY