

実閉体を成す弱計算可能実数の部分族

宮部賢志

明治大学数学科

2022 年 9 月 15 日

数学会 @ 北海道大学

本研究は、隈部正博先生 (放送大学), 鈴木登志雄先生 (東京都立大学) との共同研究を含みます.

実閉体

順序体 F が**実閉体** (real closed field) であるとは,

1. F の任意の正の元が F 内に平方根を持つこと,
 2. 任意の F 係数の奇数次の多項式が少なくとも 1 つの根を F 内に持つこと,
- をいう.

多くの同値な特徴付けが知られている.

「実数体と一階の性質が同じである」や「中間値の定理が成り立つ」を使ったものなどがある.

例

例 1

1. 実数体 $\mathbb{R}$
2. 代数的数 (有理係数多項式の根となる数)
3. 計算可能実数 (Rice 1954, Grzegorzczuk 1955)
4. 弱計算可能実数 (Ng 2005, Raichev 2005)
5. ランダムでない弱計算可能実数 (Barmpalias - Lewis-Pye 2017, Miller 2017)
6. 原始再帰的実数 (primitive recursive reals, Peter Hertling による, Selivanov and Selivanova 2021 参照)

ゴール

定義 2

α, β : 弱計算可能実数 α が β に強 Solovay 還元可能 ($\alpha \ll_S \beta$) とは, 任意の $c > 0$ に対し $(a_n) \rightarrow \alpha$, $(b_n) \rightarrow \beta$ が存在して, すべての n で以下が成り立つこと:

$$|a_n - \alpha| \leq c(|b_n - \beta| + 2^{-n})$$

定理 3

任意の $\beta \in \mathbb{R}_{wc}$ に対し, $\{\alpha : \alpha \ll_S \beta\}$ は実閉体を成す.

$\alpha \ll_S \Omega$ であることと α がランダムでない弱計算可能実数であることは同値となる.
よって, Miller の結果の一般化に見える.

目次

- Solovay 還元
- 拡張

実数の計算可能性

α が**計算可能**とは, ある計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在し, すべての n で $|a_n - a_{n-1}| \leq 2^{-n}$ かつ $\lim_n a_n = \alpha$.

α が**弱計算可能** (weakly computable) とは, ある計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在し, $\sum_n |a_n - a_{n-1}| < \infty$ かつ $\lim_n a_n = \alpha$.

$\alpha \in \mathbb{R}$ が**左 c.e.** (left-c.e.) とは, ある計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在し, すべての n で $a_{n-1} \leq a_n$ かつ $\lim_n a_n = \alpha$.

弱計算可能であることと, 2つの左 c.e. 実数の差になることは同値 (Ambos-Spies, Weihrauch, and Zheng 2000).

このため弱計算可能実数は **d.c.e. 実数**とも呼ばれる.

拡張 Solovay 還元

定義 4 (Rettinger and Zheng 2005, after Solovay 1975)

$\alpha \in \mathbb{R}_{wc}$ が $\beta \in \mathbb{R}_{wc}$ に **Solovay 還元可能** ($\alpha \leq_S \beta$) とは、計算可能な有理数列 $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ が存在して、以下が成り立つこと：

$$\lim_n a_n = \alpha, \lim_n b_n = \beta, (\exists c)(\forall n)(|a_n - \alpha| \leq c(|b_n - \beta| + 2^{-n}))$$

直感的には、 β の良い近似が与えられたときに、 α の良い近似が得られることを意味する。

b_n が β にたまたま近づきすぎてしまうこともあるので、 2^{-n} の誤差を許すように修正してある。

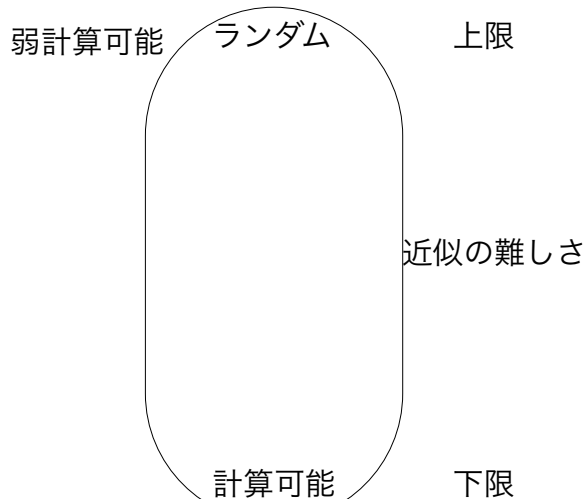
ランダム性

弱計算可能実数の中では、「近似が難しい」ことは「ランダムである」ことを意味する.

定理 5 (Rettinger and Zheng 2005, after Chaitin 1976, Solovay 1975, Calude et al. 1998, Kučera and Slaman 2001)

弱計算可能実数について, ML ランダムであることと, $Solovay$ 完全であることは同値.

まとめ



目次

- Solovay 還元
- 拡張

Solovay 還元への拡張

定理 6

$\beta \in \mathbb{R}_{wc}$ に対して,

$$S(\leq \beta) = \{\alpha \in \mathbb{R}_{wc} : \alpha \leq_S \beta\}$$

は実閉体となる.

証明の要素

- ▶ $S(\leq \beta)$ は局所リプシッツ連続な計算可能関数に関して閉じていて、体となる (Rettinger and Zheng 2005).
- ▶ 陰関数定理の計算可能版 (McNicholl 2008)
- ▶ 弱計算可能実数が体となることの証明 (Raichev 2005)

などは得られている．必要なのは多項式の根を取る操作が局所リプシッツ連続な計算可能関数になることを示すことで、 $S(\leq \beta)$ が実閉体になることが分かる．

注意

Miller の結果は

$$\{\alpha \in \mathbb{R}_{wc} : \alpha <_S \Omega\}$$

が実閉体になることを意味する.

ランダムでない弱計算可能実数から, 多項式の根を取る操作で, ランダムな弱計算可能実数を作ることはいできない.

「Solovay 還元で真に下」は実閉体にならない

ランダムでない $\beta \in \mathbb{R}_{wc}$ に対しては, $\{\alpha \in \mathbb{R}_{wc} : \alpha <_S \beta\}$ は実閉体にはならない.

定理 7 (Demuth 1975)

左 c.e. α, β に対して, $\alpha + \beta$ がランダムなら, α, β の少なくとも 1 つはランダム.

定理 8 (Downey, Hirschfeldt, and Nies 2002)

任意のランダムでない左 c.e. 実数 α に対して, $\beta, \gamma <_S \alpha$, $\beta + \gamma = \alpha$ を満たす左 c.e. 実数 β, γ が存在する.

強 Solovay 還元

定義 9

$\alpha \in \mathbb{R}_{wc}$ が $\beta \in \mathbb{R}_{wc}$ に **強 Solovay 還元可能** ($\alpha \ll_S \beta$) とは、すべての $c > 0$ に対し、計算可能な有理数列 $(a_n) \rightarrow \alpha$, $(b_n) \rightarrow \beta$ が存在して、すべての n で以下が成り立つこと：

$$|a_n - \alpha| \leq c(|b_n - \beta| + 2^{-n})$$

定理 10

任意の $\beta \in \mathbb{R}_{wc}$ に対し, $\{\alpha : \alpha \ll_S \beta\}$ は実閉体を成す.

$\alpha \in \mathbb{R}_{wc}$ に対して, $\alpha \ll_S \Omega$ は, α がランダムでないことと同値.

証明

$$S(\ll \beta) = \{\alpha \in \mathbb{R}_{wc} : \alpha \ll_S \beta\}$$

が局所リプシッツ連続な計算可能関数について閉じていることを示す.

β の近似列を上手く作る工夫が必要.

強 K 還元

$\alpha \ll_K \beta$ if

$$\lim_n (K(\beta \upharpoonright n) - K(\alpha \upharpoonright n)) = \infty$$

定理 11

左 c.e. 実数に対して,

$$\ll_K \Rightarrow \ll_S \Rightarrow \leq_S \Rightarrow \leq_K$$

弱計算可能実数の場合は, 最初の $\Rightarrow$ が成立しない.

K -trivial 実数

定理 12 (Downey, Hirschfeldt, Nies, and Stephan 2003)

実数 α, β が K -trivial なら, $\alpha + \beta$ も K -trivial.

定理 13 (Figueira, Stephan, and Wu 2006)

ある万能機械 U と自然数 m があって, すべての K -trivial 実数 $R \in [0, 2^{-m}]$ に対し, ある co-c.e. 集合 $X \subseteq 2^{<\omega}$ があって, $R = \Omega_U[X] = \sum_{p: U(p) \downarrow \in X} 2^{-|p|}$.

定理 14

K -trivial 実数は弱計算可能. 更に K -trivial 実数の集合は実閉体を成す.

終わり

