# クエリー制限と符号付き桁数表現による Solovay 還元の特徴づけ

#### 宮部賢志

明治大学

2023 年 9 月 22 日 日本数学会@東北大学 隈部正博先生 (放送大学) および鈴木登志雄 (東京都立大学) との共同研究.

#### ゴール

弱計算可能実数に対する Solovay 還元の新しい特徴付けを 2 つ与える.

- 1. 符号付桁数表現に対する Turing 還元にクエリー制限をつけるもの.
- 2. 下側および上側半計算可能 Lipschitz 関数により挟むもの.

「Solovay 還元」は左 c.e. 実数の外でもうまく振る舞う!!

### 目次

● 準備と主結果

• Lipschitz 連続関数

### 実数の計算可能性

 $lpha\in\mathbb{R}$  が計算可能とは, $\exists (a_n)_n$ : 計算可能な有理数列, すべての  $n\in\omega$  で  $|a_n - \alpha| < 2^{-n}$ .

 $\alpha \in \mathbb{R}$  が左 c.e. とは, $\exists (a_n)_n$ : 計算可能な有理数列,単調増加, $\alpha$  に収束.

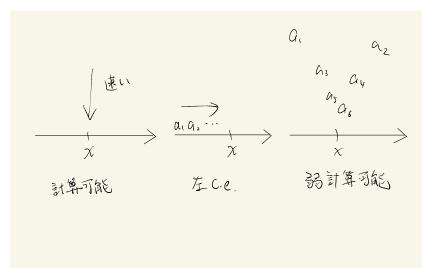
 $lpha\in\mathbb{R}$  が<mark>弱計算可能</mark>とは, $\exists (a_n)_n$ : 計算可能な有理数列,lpha に収束,かつ

$$\sum_{n} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

同値な定義として、2 つの左 c.e. 実数  $\beta, \gamma$  に対し、 $\alpha = \beta - \gamma$ .

 $\mathbf{EC} \subseteq \mathbf{LC} \subseteq \mathbf{WC}$ .

## 実数の計算可能性概念の図



## Solovay 還元

#### 定義 1 (Solovay 1970s)

 $\alpha, \beta \in \mathbf{LC}$  とする.  $\alpha$  が  $\beta$  に Solovay 還元可能  $(\alpha \leq_S \beta)$  とは,  $\exists (a_n)_n, (b_n)_n$ : 計算可能な有理数列,単調増加,それぞれ  $\alpha, \beta$  に収束,  $\exists c \in \omega$ ,

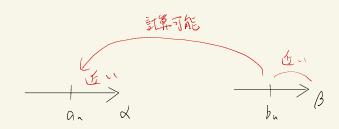
$$\alpha - a_n < c(\beta - b_n).$$

 $\beta$  に対して下からの良い近似があれば、 $\alpha$  の良い近似を計算できるということ.

### 定理 2 (Kučera and Slaman (2001) など)

左 c.e. 実数  $\beta$  が Martin-Löf ランダムであることと,左 c.e. 内で Solovay 完全であること,つまりすべての左 c.e. 実数  $\alpha$  に対して  $\alpha \leq_S \beta$  となることは同値.

## Solovay 還元の図



## 弱計算可能実数に対する Solovay 還元

#### 定義 3 (Zheng and Rettinger 2004)

 $\alpha, \beta \in \mathbf{WC}$  に対して, $\alpha$  が  $\beta$  に Solovay 還元可能 ( $\alpha \leq_S \beta$ ) とは, $\exists (a_n)_n, (b_n)_n$ : 計算可能な有理数列,それぞれ  $\alpha, \beta$  に収束, $\exists c \in \omega$ ,

$$|\alpha - a_n| < c(|\beta - b_n| + 2^{-n}).$$

 $(a_n)_n, (b_n)_n$  はどちらも単調増加である必要はない.

#### Proposition 4 (Rettinger and Zheng 2005)

弱計算可能実数が ML ランダムなら, 左 c.e. もしくは右 c.e.

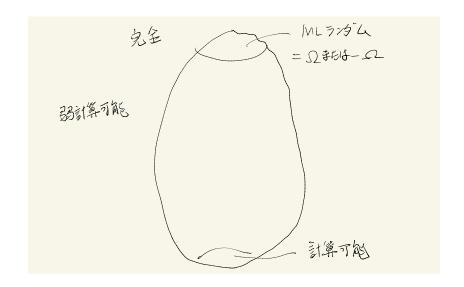
弱計算可能実数が ML ランダムであることと、弱計算可能実数の中で Solovay 完全であることは同値.

Solovay 完全な実数は、 $\Omega$  と  $-\Omega$  しかない.

## Solovay 還元の図



## Solovay 次数の図



## 符号付き桁数表示

2 進表現:

$$p \in 2^{\omega}, \ \rho_{bin}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)2^{-n-1} \in [0,1].$$

 $b-a < 2^{-n}$  に対して  $\alpha \in [a,b]$  が分かっても、 $p \upharpoonright n$  は定まらない.

#### 定義 5

 $\Sigma = \{0, \pm 1\}$  とする. 符号付き桁数表示  $\rho_{sd}$  を以下で定義する:

$$p \in \Sigma^{\omega}, \ \rho_{sd}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) 2^{-n-1} \in [-1, 1].$$

適当に整数部分を加えれば、すべての実数の表現に拡張できる.

### 実現

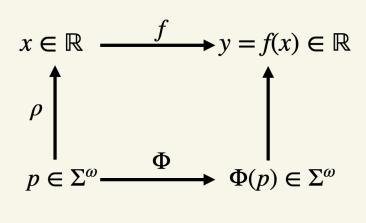
#### 定義 6

部分計算可能関数  $f:\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  が  $(\rho,\rho)$ -計算可能とは, $\exists\Phi:\subseteq\Sigma^\omega\to\Sigma^\omega$ : Turing 還元,

$$(\forall p \in \Sigma^{\omega})[\rho(p) = x \in \text{dom}(f) \Rightarrow \rho(\Phi(p)) = f(x)].$$

 $\Phi$  が f を実現する (realize) と呼ぶ.

### 実現の図



### 符号付き桁数表示

#### 定理7(主結果)

 $lpha,eta\in\mathbf{WC}$  に対して  $lpha\leq_Seta$  であることと以下は同値: $\exists g$ : 部分計算可能関数

- $ightharpoonup \alpha = g(\beta),$
- ightharpoonup g は H(n)=n+O(1) のクエリー制限の元で  $(\rho,\rho)$ -計算可能.

ここで、 $\rho$  は符号付き桁数表示.

近似列を使わないので、定義を任意の実数に拡張可能.

tt や wtt などの還元と似た形をしている.

すべての  $\beta$  の  $\rho$ -表現 B に対し, $\Phi$  は  $\alpha$  の  $\rho$ -表現の 1 つを計算し,さらに  $A \upharpoonright n$  は  $B \upharpoonright H(n)$  から計算できる.

### 目次

• 準備と主結果

● Lipschitz 連続関数

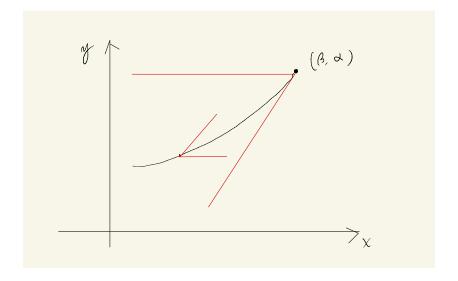
## Lipschitz 関数による Solovay 還元の特徴づけ

#### Proposition 8 (隈部, 宮部, 水澤, 鈴木 2020; Theorem 4.2)

 $lpha,\ eta$  を左 c.e. とする.  $lpha\leq_Seta$  であることと以下は同値:計算可能で非減少の Lipschitz 関数 f でその定義域が  $(-\infty,eta)$  であって  $\lim_{x oeta-0}f(x)=lpha$  となるものが存在する.

弱計算可能実数に拡張できるか?

## Solovay reducibility via Lipschitz functions



## 弱計算可能版

#### 定義 9

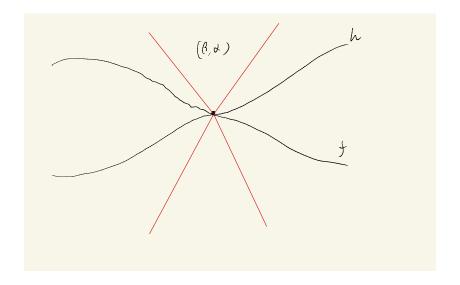
関数区間 (function interval) とは、すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し  $f(x) \leq h(x)$  となる 2 関数 f,h の組をいう. 関数区間 (f,h) が半計算可能とは、f が下側半計算可能で、h が上側半計算可能であることをいう.

#### 定理 10

 $lpha,eta\in\mathbf{WC}$  として, $lpha\leq_Seta$  と以下は同値:以下を満たす半計算可能な関数区間 (f,h) が存在する.

- 1. f,h は共に Lipschitz 関数
- 2.  $f(\beta) = h(\beta) = \alpha$ .

## 弱計算可能実数版



## 変種

ここで「半計算可能な関数区間」を「計算可能な関数」に置き換えることはできない.

### その他

- ▶ クエリー制限を変化させることで Hölder 連続に置き換えることができる.
- ▶ 微分係数が 0 という概念も自然な還元となり、強 Solovay 還元と呼んでいる.
- ▶ 符号付き桁数表示に対するランダム性は面白そうなトピック
- ▶ 弱計算可能実数ではない場合については、ほとんどまだ調べられていない.

ありがとうございました.