アルゴリズム的ランダムネスと学習可能性(1)

宮部賢志(明治大学)

2024年7月9日(火) -- 12日(金)
RIMS共同研究（公開型）
数理論理学の最近の進展
Symposium on Advances in Mathematical Logic

目次

1. ランダムネスの理論の概要・歴史: (1)前半
2. Martin-Löfランダム性: (1)後半
3. マルチンゲール: (2)前半
4. Kolmogorov複雑性: (2)後半
5. Solovay還元: (3)前半
6. 学習可能性: (3)後半

ランダムネスの理論の概要・歴史

概要

- **アルゴリズム的ランダムネスの理論**(algorithmic randomness theory)は，ある空間上の点がランダム性を定義し，そのランダム性と計算可能性や予測可能性，学習可能性などの概念との関係を調べる．
- 計算論および確率論・情報理論の知識を前提とする．
- Chaitin曰く「Shannonの情報理論とTuringの計算理論をシェイカーに入れて，力いっぱいシェイクしてできたもの」
- **アルゴリズム的情報理論**(Algorithmic Information Theory)とも呼ばれる．
- 特に計算可能性の観点で興味深い現象に焦点を当てる．

ランダムとは

0と1を並べた無限列がランダムであるとはどういうことか？

- 0101010101010101$\cdots$
  - 0と1が交互に現れる計算可能な列はランダムではない．
- 11001001000011111110110$\cdots$
  - 一見，ランダムに見えるが，πの2進展開で，ランダムではない．
- 0100101001010010100101$\cdots$
  - 疑似乱数なのでランダムではない．

しかし，ほとんどの無限列はランダムであろう．

計算可能性の概念を使って，ランダム性を定義する．

ランダム性の定義

- 典型的(typicalness): Martin-Löfランダム性の定義に使われる
- 予測不能性(unpredictability): マルチンゲールによる特徴づけ
- 圧縮不可能性(incompressibility): Kolmogorov複雑性による特徴づけ

Schnorrランダム性，計算可能ランダム性，Kurtzランダム性，n-ランダム性などもある．
それぞれの特徴づけや，分離可能性(対角線論法や優先法の活躍の場!)について論じる．

ランダムと計算可能性

計算(不)可能な列(や点)が定義されたら，より計算が不可能な列を考える．

計算可能性は還元により比較される：Turing還元，m-還元，tt-還元など．

「よりランダムである」という関係を定義する：Solovay還元，K還元，vL還元など．

ランダム性の還元と計算可能性の還元の関係を論じる．

解析学の実効化

力学系におけるハウスドルフ次元や，学習理論における予測可能性の理論について，計算可能性を考慮すると自然にランダムの概念が出てくる．

ランダムの概念を使って(特殊な場合について)より精密な結果を，より単純な証明により，得ることができることもある．

歴史

Hilbertの23の問題(1900)の第6問題:「物理学の諸公理の数学的扱い」
特に確率と力学(Hilbert自身による)

von Mises(1919)に始まる頻度説に基づく確率論
collectiveと呼ばれるランダムな列の定義を試みた
$\Rightarrow$ Ville (1939) により，重複対数の法則を満たさないcollectiveの構成，ランダム性の定義としては不十分

Kolmogorov(1933)による測度論による確率の公理化
$\Rightarrow$ 有限列のランダム性の定義の必要性を指摘
$\Rightarrow$ 1970sにKolmogorov複雑性が導入され，ランダムネスの理論が始まる

前提

計算論および測度論の知識は仮定する．

特に$A \subseteq \omega$が計算可能であるとは，関数

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

がTuring機械で計算可能であることをいう．
$A \subseteq \omega$がc.e.(computably enumerable)であるとは，ある計算可能な関数$\phi : \omega \to \omega$の値域であることをいう．計算可能な関係$P(n, m)$で，

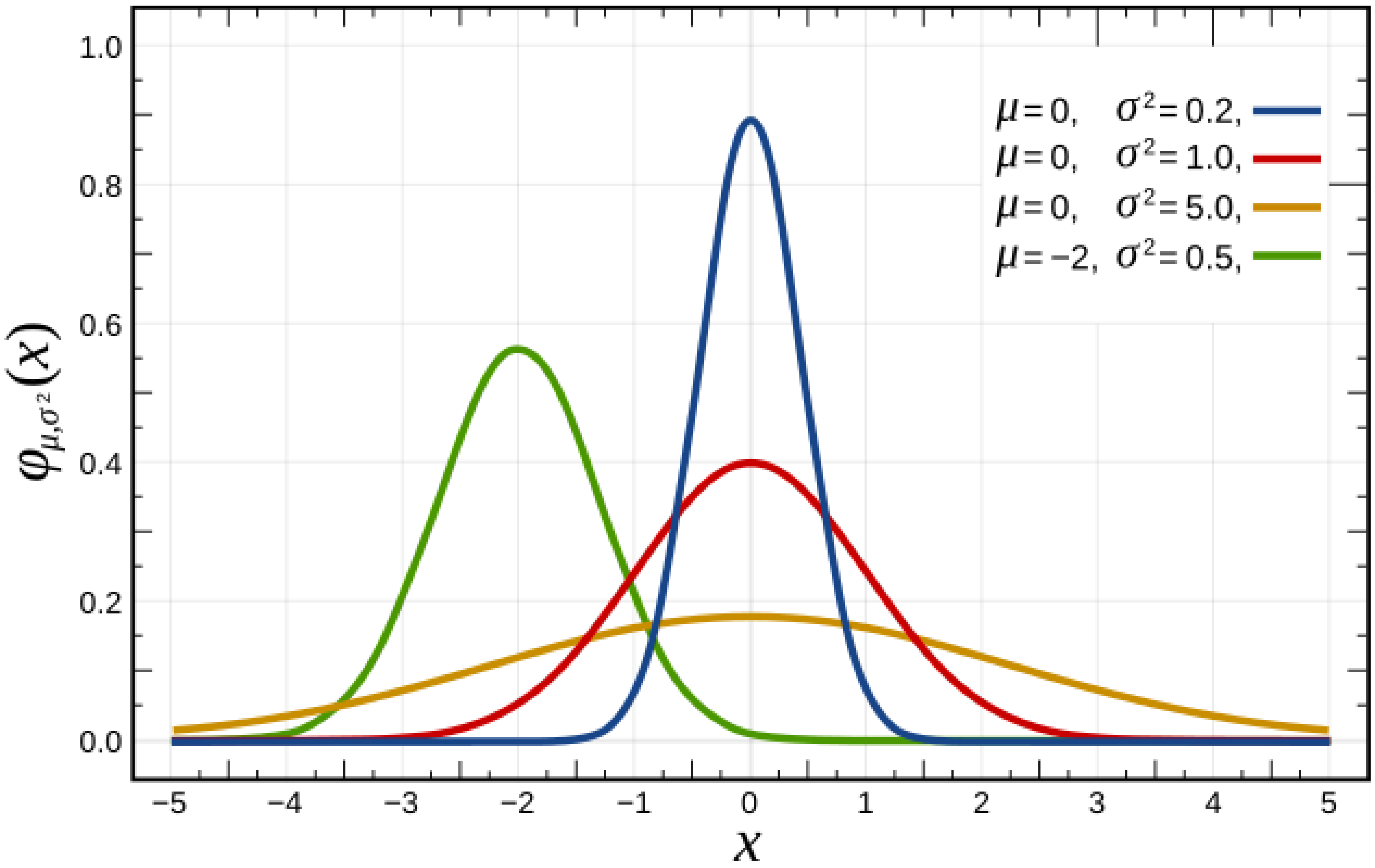
$$A = \{n \in \omega : \exists m P(n, m)\}$$

Martin-Löfランダム性

検定

統計的仮説検定では，

- 仮説を測度で表現する
- 小さな測度を持つ集合を事前に定める
  - その集合の測度は慣例として0.05
- その集合に含まれていればその仮説を棄却する，ランダムには見えない
- その集合に含まれていなければ，不自然さは見当たらないと考える



Inductiveload - self-made, Mathematica, Inkscape, パブリック・ドメイン,
[https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3817954による](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3817954)

測度0

測度論において，
Aの測度が0 $\Longleftrightarrow$ 任意に小さな測度の開集合の共通部分で覆える

計算可能に書ける測度0の集合に含まれてればランダムではない，含まれていなければランダムであるとしてランダム性を定義する．

Cantor空間

Cantor空間: 2^ω

$\sigma \in 2^{<\omega}$に対し，$[\sigma] = \{X \in 2^\omega \ : \ \sigma \prec X\}$で定まる**柱状集合**(cylinder set)を開基とする位相を入れる

一様測度: $\mu([\sigma]) = 2^{-|\sigma|}$

$2^{<\omega}$のc.e.集合Sに対して，$U = \bigcup_{\sigma \in S} [\sigma]$と書ける開集合$U$を**c.e.開集合**と呼ぶ．

Martin-Löfランダム性

定義(Martin-Löf 1966)

Martin-Löf検定(ML検定): 一様c.e.開集合の列$(U_n)_{n\in\omega}$で，すべての$n \in \omega$で$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$となるもの．

$X \in 2^\omega$とML検定$(U_n)_n$に対して，$X \notin \bigcap_n U_n$となるとき，XはML検定$(U_n)_n$に**合格する**(pass)という．

$X \in 2^\omega$がすべてのML検定に合格するとき，Xは**MLランダム**であるという．

Martin-Löf Type Theoryの人．ランダムネスに対する数少ない貢献の1つ．

例

命題

計算可能な列はMLランダムではない．

証明

$A \in 2^\omega$を計算可能な列とする．

$U_n = [A \upharpoonright n]$とすると，$(U_n)_n$はML検定で，$A$は合格しない．

MLランダムな列の集合の測度

命題

MLランダムな列の集合の測度は1

証明

各検定に合格しない列の集合の測度は0で，検定は高々可算個なので．

万能ML検定の存在

定理

万能ML検定(universal ML-test)が存在する．すなわち，すべてのMLランダムでない列を覆うML検定が存在する.

証明

部分計算可能関数は計算可能に数え上げることができる.

同様にc.e.開集合も計算可能に数え上げることができる.

$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$を満たす範囲で近似することにより，ML検定も計算可能に数え上げることができる.

万能ML検定の存在(続き)

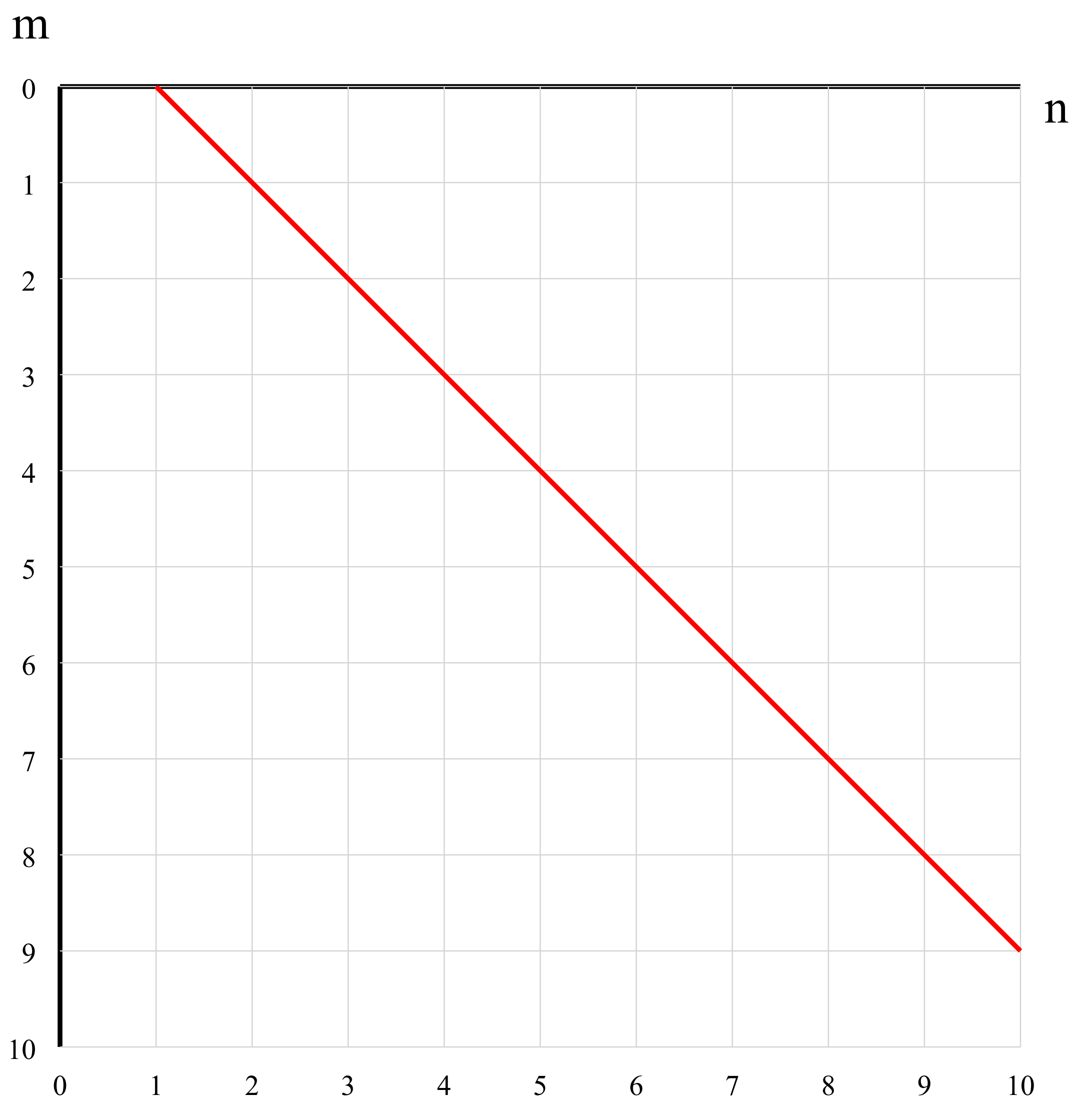
U_n^mをm番目の検定の第n項のc.e.開集合とする.

$$V_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} U_{n+m+1}^m$$

とおくと,$(V_n)_n$は一様c.e.開集合の列で,

$$\mu(V_n) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \mu(U_{n+m+1}^m) \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(n+m+1)} = 2^{-n}$$

よって,(V_n)はML検定である.


m
n
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

万能ML検定の存在(続き)

$X \in 2^\omega$がMLランダムでないとする．

ある$m \in \omega$が存在して，$X \in \bigcap_n U_n^m$となる．

よって，すべての$n \in \omega$に対して，

$$X \in U_{n+m+1}^m \subseteq V_n$$

すなわち，Xは$(V_n)_n$に合格しない．

これは，$(V_n)_n$が万能であることを意味する．

大数の法則

大数の強法則: 確率1で，0と1の相対頻度の極限は$\frac{1}{2}$

大数の強法則が成り立たない列の集合の測度は0.

証明を見れば，任意に小さい測度の開集合で覆うことができる.

このML検定に合格する列は大数の法則を満たす.

つまり，MLランダムな列は大数の法則を満たす.

このように，ランダムネスの理論ではランダムな列の性質として言及できるという意味で，確率論の極限定理の精密化になっている.

Cantor空間と$[0, 1]$

Cantor空間上の列と$[0, 1]$による2進無限列を同一視する.

一様測度はルベーグ測度に対応する.

複数の展開が可能な実数は2進有理数だけで，すべて計算可能なので，同一視が許される.

$[0, 1]$上でML検定を考えても良い.

MLランダム列の例

MLランダムな列の存在は測度による議論から分かる．

実数$x \in [0,1]$がleft-c.e.であるとは，計算可能で単調増加な有理数列$(a_n)_n$で，$x = \lim_n a_n$となるものが存在することをいう．

定理

left-c.e. MLランダムな列が存在する．

証明

万能ML検定$(U_n)_n$に対し，$X = \min U_1^c$とすれば，Xはleft-c.e. MLランダムな列である．

一般空間上のランダム性

計算可能性が入った距離空間と計算可能な測度に対して，自然にMLランダム性は定義される．

Schnorrランダム性

定義 (Schnorr 1971)

ML検定において$\mu(U_n) = 2^{-n}$とする検定から導かれる概念をSchnorrランダム性と呼ぶ.

定理
万能Schnorr検定は存在しない.

(演習問題:証明せよ)

分離

定理

MLランダムな列はSchnorrランダムである．

Schnorrランダムだが，MLランダムでない列が存在する．

前半は自明．後半は明日に．