量化子変更によるSolovay還元の派生形

Quantifier variations in Solovay reducibility

隈部正博　(放送大学教養学部)*1
鈴木登志雄　(都立大学理学研究科)*2
宮部賢志　(明治大学理工学部)*3

1. 概要

Solovay 還元 ([1, Chapter 9] を参照) は，アルゴリズム的ランダムネスにおける基本的な概念であり，実数のランダム性を比較するために用いられる．本講演では Solovay 還元の定義・特徴付けにおいて量化子を変更した条件件を考察し，その変更が左 c.e. 実数および計算近似可能実数 (c.a. 実数)，それぞれの場合にどのように影響するかを明らかにする．

2. 左 c.e. 実数の場合

左 c.e. 実数に対する Solovay 還元の特徴付けのうち，単調増加で計算可能な有理数列による近似を使うものに注目する．

左 c.e. 実数 α に収束する単調増加かつ計算可能な有理数列の集合を $\mathrm{ICS}(\alpha)$ で表す．左 c.e. 実数 α, β に対し，α が β に **Solovay 還元可能**であることと，ある $(a_s)_s \in \mathrm{ICS}(\alpha)$, $(b_s)_s \in \mathrm{ICS}(\beta)$ と $q \in \omega$ が存在して，$(\forall s \in \omega)[\alpha - a_s < q(\beta - b_s)]$ となることは同値である．さて，

$$P_0^L : (\exists q \in \omega)(\forall s \in \omega)[\alpha - a_s < q(\beta - b_s)]$$

とおいて，

$$\text{(L-I) } (\exists(a_s))(\exists(b_s))P_0^L, \quad \text{(L-II) } (\forall(b_s))(\exists(a_s))P_0^L, \quad \text{(L-III) } (\forall(a_s))(\exists(b_s))P_0^L$$

という条件を考える．ここで量化に際して，$(a_s)_s \in \mathrm{ICS}(\alpha)$, $(b_s)_s \in \mathrm{ICS}(\beta)$ を省略している．(L-I) は上で述べた Solovay 還元の特徴づけそのものである．また，(L-I), (L-II), (L-III) はすべて同値になる．すなわち前半に全称量化子 $\forall$ をつけても同値になる．一方，後半に全称量化子 $\forall$ をつけると同値にはならないが，対応する数列の計算可能な部分列を取ることで Solovay 還元と同値になる．この意味で左 c.e. 実数に対する Solovay 還元は量化子の変更に関して比較的頑健である．

3. c.a. 実数の場合

Rettinger と Zheng([4, 3]) は c.a. 実数に対する Solovay 還元を定義し，その性質を調べている．c.a. 実数 α に収束する計算可能な有理数列の集合を $\mathrm{CS}(\alpha)$ で表す．c.a. 実数 α, β に対し，α が β に **Solovay 還元可能**であるとは，ある $(a_s)_s \in \mathrm{CS}(\alpha)$, $(b_s)_s \in \mathrm{CS}(\beta)$ と $q \in \omega$ が存在して，$(\forall s \in \omega)[|\alpha - a_s| < q(|\beta - b_s| + 2^{-s})]$ となることとして定義する．

$$P_0 : (\exists q \in \omega)(\forall s \in \omega)[|\alpha - a_s| < q(|\beta - b_s| + 2^{-s})]$$

*1 e-mail: `kumabe@ouj.ac.jp`
*2 e-mail: `toshio-suzuki@tmu.ac.jp`
*3 e-mail: `research@kenshi.miyabe.name`

として，

$$\text{(I)}\ (\exists(a_s))(\exists(b_s))P_0,\quad \text{(II)}\ (\forall(b_s))(\exists(a_s))P_0,\quad \text{(III)}\ (\forall(a_s))(\exists(b_s))P_0$$

という条件を考える．ここで量化に際して，$(a_s)_s \in \mathrm{CS}(\alpha)$, $(b_s)_s \in \mathrm{CS}(\beta)$ を省略している．左 c.e. 実数に対する Solovay 還元の頑健性を知っていれば，これらも同値になると期待してしまうが，自明ではない．(II) では $(b_s)_s$ の計算可能な部分列を，(III) では $(a_s)_s$ の計算可能な部分列をとれば，(I) と同値になる．

明らかに (II) ならば (I) である．以下のように逆は成り立たない．

定理 1. 左 c.e. 実数 α, β で，(I) は成立するが，(II) は成立しないものが存在する．

証明の概略を述べる．(I) のための $(a_s)_s \in \mathrm{ICS}(\alpha)$, $(b_s)_s \in \mathrm{ICS}(\beta)$ を作る．また (II) の否定である

$$\exists(d_s)_s \in \mathrm{CS}(\beta)\forall(c_s)_s \in \mathrm{CS}(\alpha)\forall q \in \omega\exists t \in \omega[|\alpha - c_t| \geq q(|\beta - d_t| + 2^{-t})]$$

のための $(d_s)_s \in \mathrm{CS}(\beta)$ を作る．ここで，β は左 c.e. 実数だが，$(d_s)_s \in \mathrm{ICS}(\beta)$ にはできない．

(I) のために，β がある b_s に近いとき，α の動ける範囲は厳しく制限されている．しかし，d_t として β から離れているように取れば，α が動ける範囲の制限は緩い．そのため，各 $(c_s)_s \in \mathrm{CS}(\alpha)$ と $q \in \omega$ に対して，うまく $t \in \omega$ を選んで，上の条件が成り立つような α の範囲を見つけることができる．すべての条件を同時に成立させるため，$(c_s)_s \in \mathrm{CS}(\alpha)$ としてあり得るものを含めて計算可能に列挙し，それぞれに証拠 t を保存するように，finite injury の優先論法を使って α, β を作る．

更に，α, β が左 c.e. 実数となるように，$(a_s)_s$ と $(b_s)_s$ は単調増加にしたい．そのため，injury が起こったときに，α, β の制約位置が大きくなる方向に移動する必要がある．そうなるように $(d_s)_s$ を右に左に移動させることになる．

似た手法を使うことで，(I) は成立するが，(III) は成立しない c.a. 実数 α, β が存在することを示すことができる．

4. 最後に

筆者らの先行研究 [2] では，Solovay 還元を部分リプシッツ関数とも呼ぶべき概念を使って特徴づけた．更に，その関数を全域には拡張できないことも明らかにした．今回の結果も，その部分性の表出である．

References

[1] R. G. Downey and D. R. Hirschfeldt. *Algorithmic randomness and complexity.* Theory and Applications of Computability. Springer, New York, 2010.

[2] M. Kumabe, K. Miyabe, and T. Suzuki. Solovay reducibility via Lipschitz functions and signed-digit representation. to appear in Computability.

[3] R. Rettinger and X. Zheng. Solovay reducibility on d-c.e real numbers. In *Computing and Combinatorics: 11th Annual International Conference, COCOON 2005, Kunming, China, August 16-19, 2005, Proceedings*, volume 3595, pages 359–368. Springer, 2005.

[4] X. Zheng and R. Rettinger. On the extensions of Solovay-reducibility. In K.-Y. Chwa and J. Munro, editors, *Computing and Combinatorics: 10th Annual International Conference, COCOON 2004, Jeju Island, Korea, August 17-20, 2004, Proceedings*, volume 3106, pages 360–369. Springer, 2004.