量化子変更によるSolovay還元の派生形

Quantifier variations in Solovay reducibility

隈部正博 (放送大学教養学部)
鈴木登志雄 (都立大学理学研究科)
宮部賢志 (明治大学理工学部, 講演者)

日本数学会
2025年3月18日(火)

導入

以下の6つは異なる概念である.

- $\forall x \forall y P(x, y)$
- $\forall x \exists y P(x, y)$
- $\forall y \exists x P(x, y)$
- $\exists x \forall y P(x, y)$
- $\exists y \forall x P(x, y)$
- $\exists x \exists y P(x, y)$

述語$P(x, y)$として「xがyを好き」という解釈を考えてみよう.
(学部の授業でε-δ論法の前に話をすると反応が良い.)

ゴール

Solovay還元について，量化子の変更によって概念が変化するかどうか考察する.

結論

左c.e.実数に対してはロバスト
c.a.実数に対しては脆弱→優先法で反例を構成する
どちらに対してもロバストな特徴付けも与える

定義(左c.e.の場合)

定義 実数αが**左c.e.**(left-c.e.)とは，単調増加かつ計算可能な有理数列の極限になること.

定義

左c.e.実数α, βに対し，αがβに**Solovay還元可能**とは，それぞれの近似列$(a_s)_s, (b_s)_s$と$q \in \omega$が存在して，

$$(\forall s \in \omega)[\alpha - a_s < q(\beta - b_s)]$$

が成り立つこと.

注意：オリジナルの定義とは異なるが，よく使われる特徴づけ.

条件表記(左c.e.の場合)

$P_0^L : (\exists q \in \omega)(\forall s \in \omega)[\alpha - a_s < q(\beta - b_s)]$
として,

- **(L-I)** $(\exists(a_s))(\exists(b_s))P_0^L$
- **(L-II)** $(\forall(b_s))(\exists(a_s))P_0^L$
- **(L-III)** $(\forall(a_s))(\exists(b_s))P_0^L$

とおくと，(L-I)，(L-II)，(L-III)はすべて同値.
後半に∀をつける場合，後半で計算可能な部分列を取れば同値となる.
ここで∃や∀はそれぞれの近似列を動く.

定義(c.a.の場合)

定義 実数αが**c.a.**(computably approximable)とは，計算可能な有理数列の極限となること．単調増加である必要はない．

定義

c.a.実数α, βに対し，αがβに**Solovay還元可能**とは，それぞれの近似列$(a_s)_s, (b_s)_s$と$q \in \omega$が存在して，

$$(\forall s \in \omega)[|\alpha - a_s| < q(|\beta - b_s| + 2^{-s})]$$

が成り立つこと．

左c.e.実数α, βに対しては，以前の定義と同値．

条件表記(c.a.の場合)

$$P_0 : (\exists q \in \omega)(\forall s \in \omega)[|\alpha - a_s| < q(|\beta - b_s| + 2^{-s})]$$

- **(I)** $(\exists (a_s))(\exists (b_s))P_0$
- **(II)** $(\forall (b_s))(\exists (a_s))P_0$
- **(III)** $(\forall (a_s))(\exists (b_s))P_0$

疑問

疑問 (I),(II),(III)は同値だろうか？

- 左c.e.実数ではロバストだったから，c.a.実数でもロバストだと無意識のうちに思っていた.
- そのように証明なしで書いてある論文もあった.
- もしかしたら違うかもしれないと思えば，左c.e.実数に対する証明が回らないことはすぐ分かる．しかし，反例を構成するのは面倒.

注意

(II)では(b_s)の計算可能な部分列を，(III)では(a_s)の計算可能な部分列を取ると，(I)と同値になる

主結果

定理

左c.e.実数α, βで，(I)は成立するが，(II)は成立しないものが存在する．

注意

c.a.実数に対する定義(I),(II)に対する反例が，左c.e.実数で作れるということ．
「左c.e.実数に対しては，2つの定義が同値になる」という事実とは矛盾しない．

証明概略

finite injury methodでα, βを構成する.

(II)の否定:

$$\exists (d_s)_s \forall (c_s)_s \forall q \in \omega \exists t \in \omega [|\alpha - c_t| \geq q(|\beta - d_t| + 2^{-t})]$$

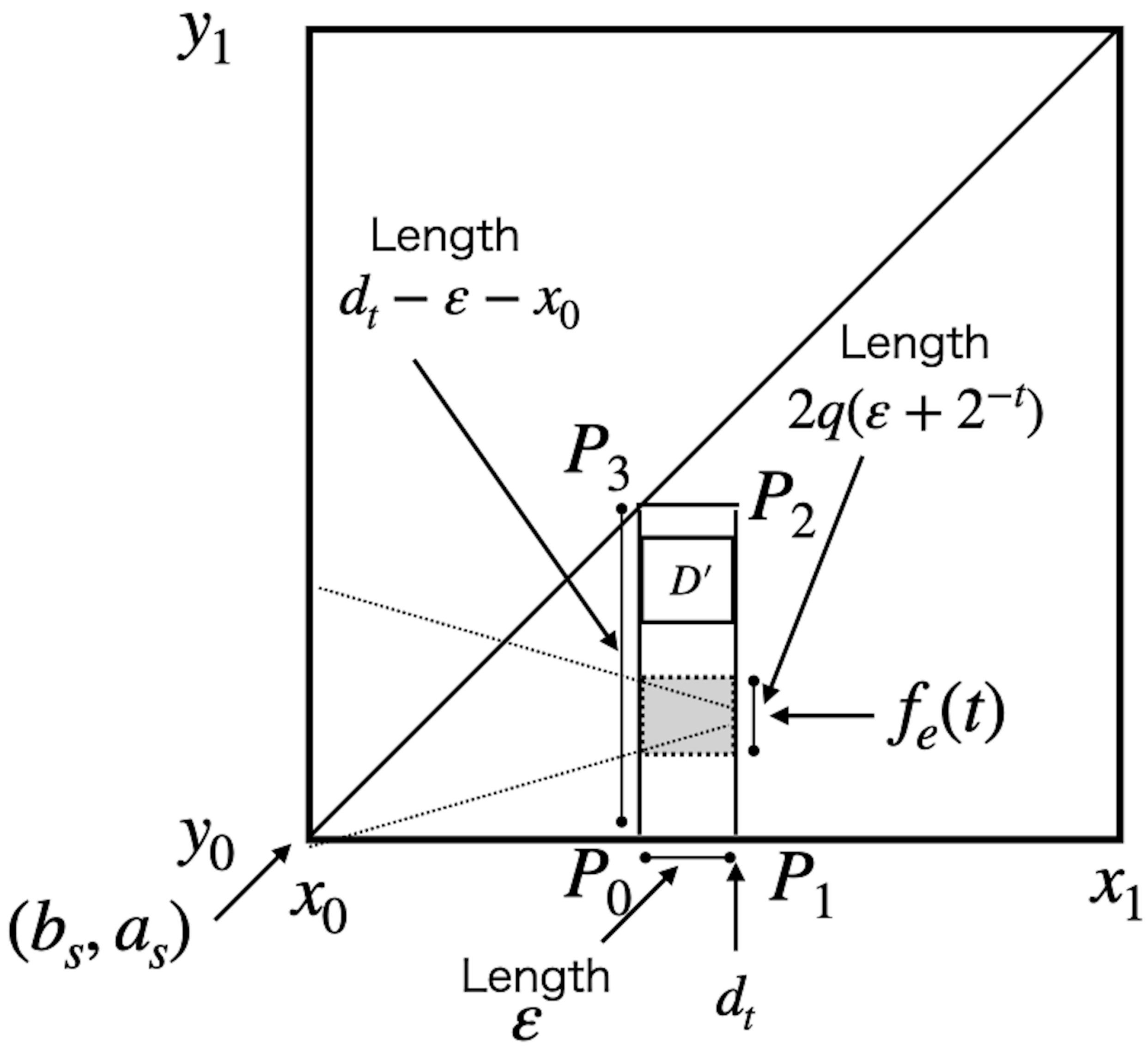
を満たす$(d_s)_s \to \beta$を構成する.

単純のため，固定した$(c_s)_s, q$を考える.

十分大きなtをとり，c_tがstage $s > t$で定まったら，すでに定まっているd_tの近くにβを置くようにする.

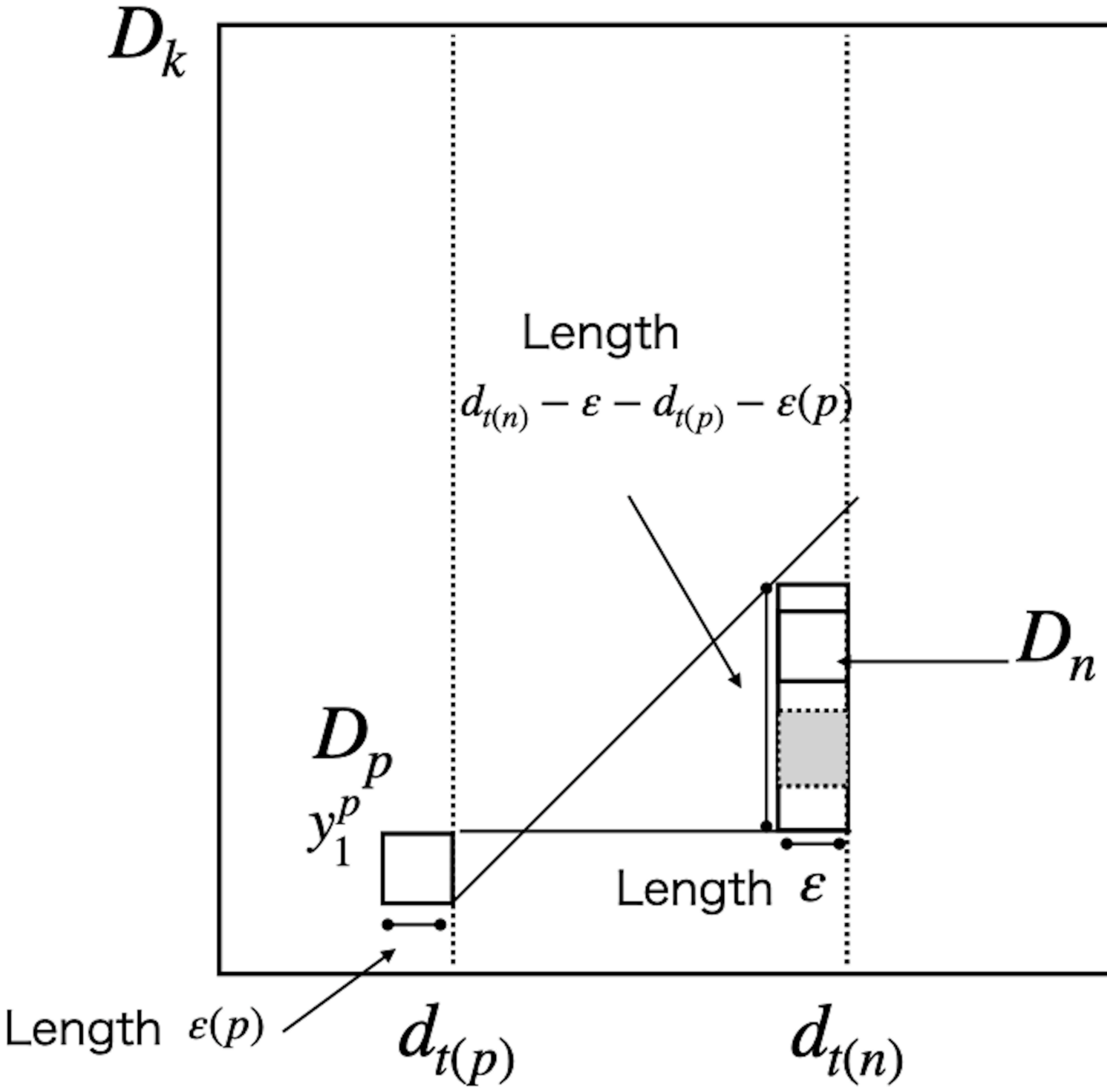
c_tが定義されるタイミングで，injuryが起こる.

図1



y_1
Length
$d_t - \varepsilon - x_0$
Length
$2q(\varepsilon + 2^{-t})$
P_3
P_2
D'
$f_e(t)$
y_0
(b_s, a_s)
x_0
P_0
P_1
x_1
Length
ε
d_t

図2


D_k
Length
$d_{t(n)} - \varepsilon - d_{t(p)} - \varepsilon(p)$
D_n
D_p
y_1^p
Length ε
Length $\varepsilon(p)$
$d_{t(p)}$
$d_{t(n)}$

最後に

- 同様の手法で，(I)は成立するが，(III)が成立しない反例も構成できる.
- 剰余項2^{-s}を「計算可能な0に収束する列」(ただし単調である必要はない)に変更するとロバストになる.
- 左c.e.実数に対するSolovay還元はリプシッツ関数で特徴づけることができるが，c.a.実数に対しては**部分リプシッツ関数**とでも呼ぶべき概念で特徴づけられる．つまり，全域には拡張できない．この部分性が量化子の変更ができないという形で表れている.
- 量化子の変更には注意しましょう.