

人工知能は数学者になれるか

宮部賢志（明治大学理工学部数学科）
明治大学理工学部付属校サマーセミナー
2025年8月25日(月)

1. 数学のこれまで: **ひらめきからルール化**により発展
2. 数学の現在: AIは賢くなったが、数学を**創造したり**、正しさに**責任を持つ**のは人間の仕事
3. 数学は思考力を鍛える. おそらくは、**正誤が明確**であること、**ステップ数が長い**ことが要因

第1章：数学はどう発展してきたのか

本章のゴール：数学における**ひらめき**が，抽象化・概念化され，**ルール化**されることで，誰でも使えるようになっていくことを理解する．



最初に気がついた人はすごい.

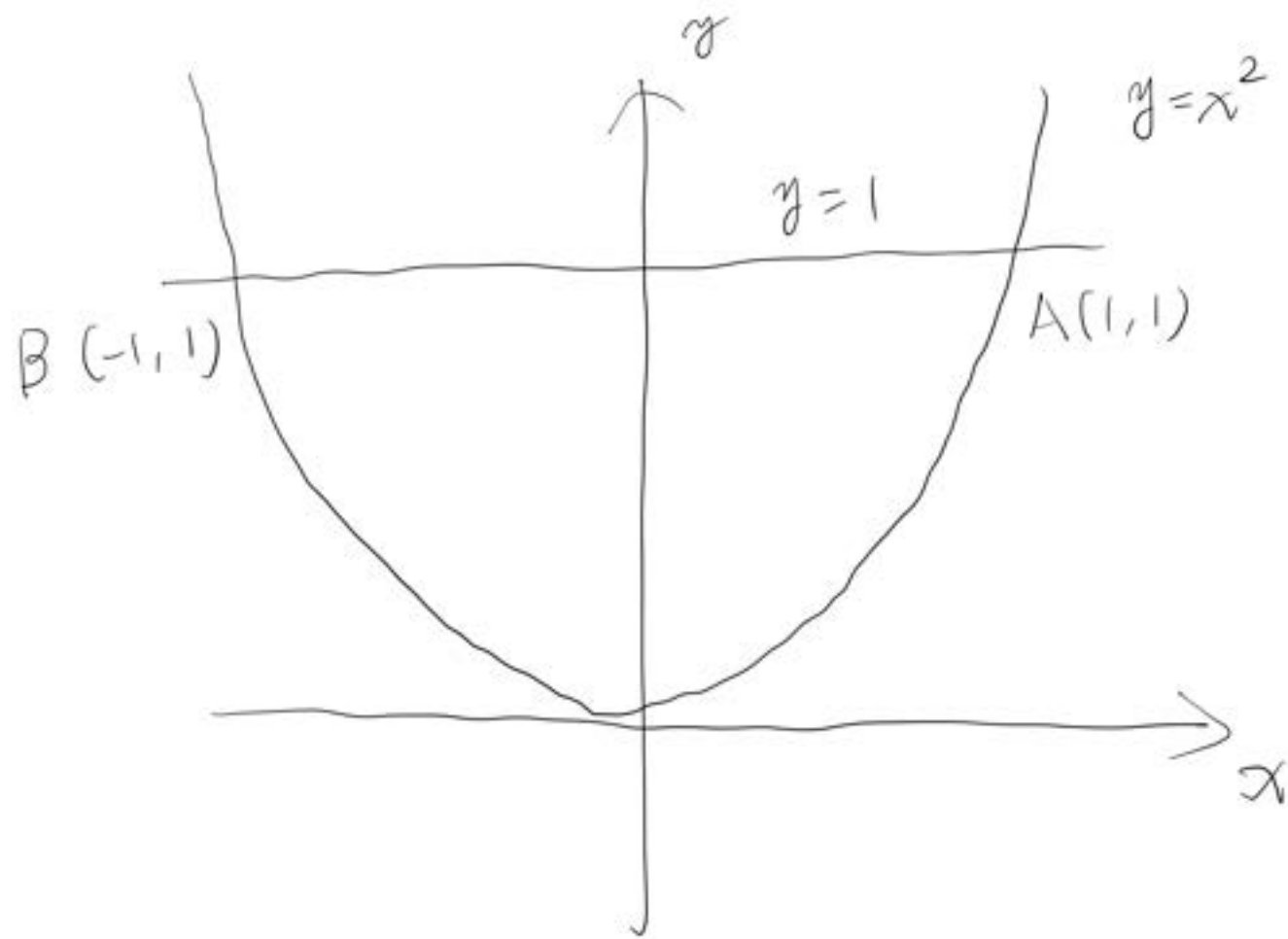
- 分数：紀元前2000年頃メソポタミア, エジプトなど
 - 負の数や0：数としての扱いは7世紀頃のインド
 - 方程式の体系化：9世紀イスラムのアル＝フワーリズミー
 - 対数：1614年ネイピア(Napier)
- > 代数学(algebra)として発展

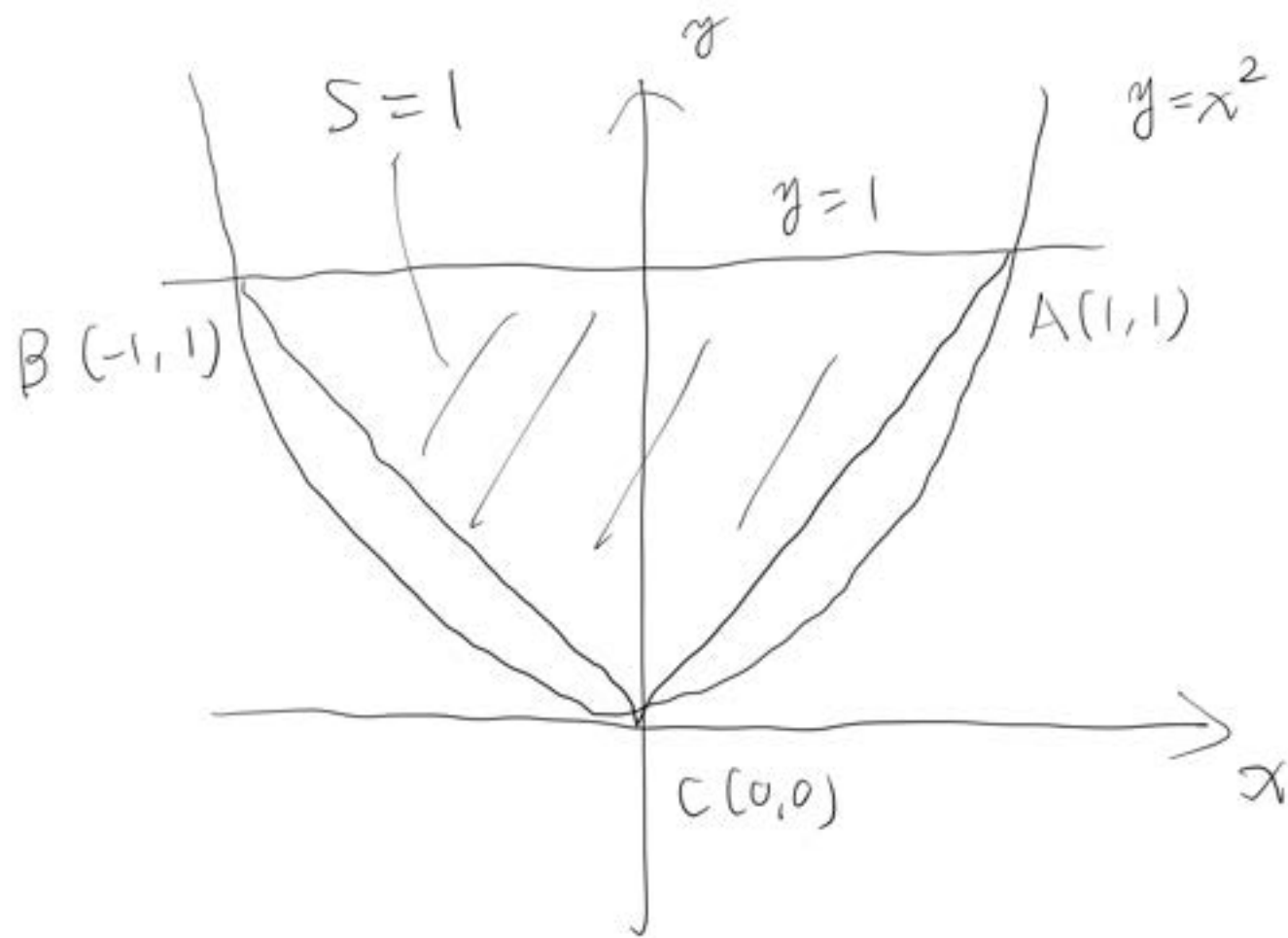
- 土地の測量, 天体観測, 時間の計算: 紀元前2000年頃メソポタミアや中国で, 面積や角度の計算
 - 平行線, 相似: 紀元前600年頃ギリシャ, タレス
 - ピタゴラスの定理: 紀元前500年頃ギリシャ
 - ユークリッドの原論, 点・線・面の定義・定理: 紀元前300年頃
 - アルキメデス, 円の面積, 球の体積など: 紀元前250年頃
- > 幾何学(geometry)として発展

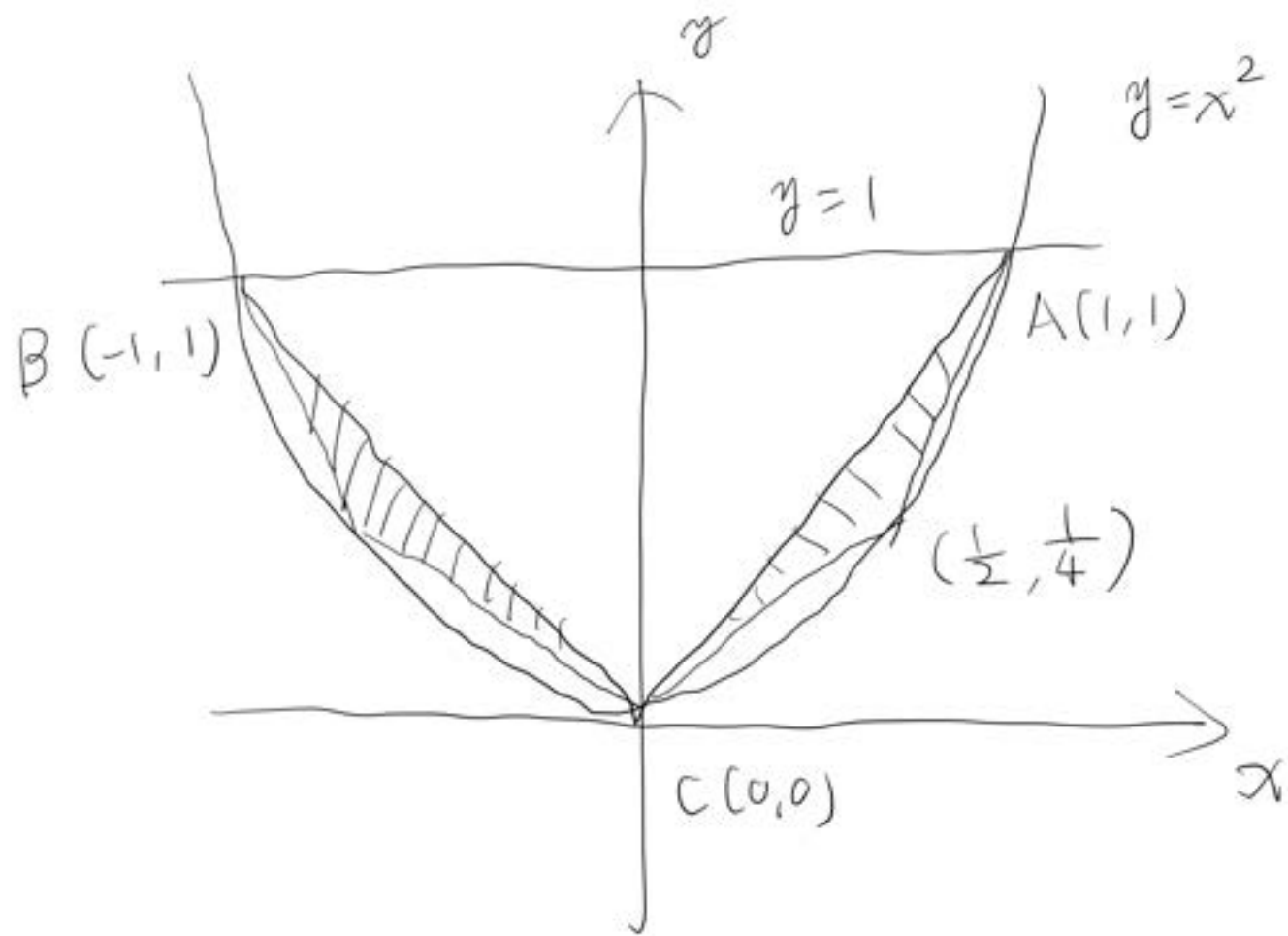
微積分の発見

- 17世紀末：ニュートンとライプニッツによる微積分の発見
 - 18世紀：オイラー，指数関数，対数関数，三角関数の体系化
 - ラグランジュ：変分法，解析力学
 - 19世紀：フーリエ級数
 - コーシーによる ε - δ 論法の導入
- > 解析学(analysis)として発展

ひらめきがルール化される例を見てみよう． 約2000年前の話







$(0, 0), (a, b), (c, d)$ の3点の三角形の面積は, $\frac{1}{2}|ad - bc|$

$$S_2 = 2 \times \frac{1}{2} \left| 1 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}$$

これを繰り返すことで, 初項1, 公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列の和が求める面積. 等比数列の和の公式 $\frac{a}{1-r}$ に当てはめると,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

積分

高校2年生になると、積分という概念を習う。積分を使えば一瞬で答えが出る。

下側の面積は

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

全体の長方形から、この面積を引くと、求める面積となる。

$$2 \cdot 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Q. 高校までの数学でも十分複雑. 大学の数学が役に立つことがあるのか？

A. 世の中にはもっと複雑なものがたくさんある. 数学的な理解やそのための技術の発展はまったく追いついていない.

第1章のまとめ

「取り尽くし法」は**ひらめき**が必要だが、難しい抽象概念は出てこない.
「積分」は理解するのに苦勞するが、**計算ルール**ははるかに簡単.

この**ひらめき**が、**ルール化**され、誰でも扱えるように概念を整備するというのを繰り返してきた.

今日からできること

- 先哲のひらめきに感謝すること
- 概念を理解してルールに従う(たぶんみんな意識している)

第2章：AIはどんな数学ができるのか

本章のゴール: AIの強みは**ルールに則った計算**であり，大学の学部レベルの問題はだいたい解けるようになった．一方，**新概念を創造**したり，**証明の正しさに責任を持つ**ことは人間の仕事．



「ルールを完璧に整備すれば、すべての数学の問題が機械的に解けるのでは？」
機械化を明確に意識した2人.

ライプニッツ(1646-1716): ニュートンと並んで微積分を発明

ヒルベルト(1862-1943): ヒルベルト・プログラム

専門の言葉では、数学の無矛盾で完全な範疇的公理系を構築することを目指した.

様々な可能性と不可能性

20世紀以降, 計算によってできること・できないことが見えてきた.

ゲーデルの不完全性定理(1931): 十分に表現力のある公理系では, 真か偽かを決められない命題が必ず生じる.

$P \neq NP$ 問題(1971): 解の検証は速いが, 解の探索も速いとは限らないかもしれない (未解決).

量子子消去 (タルスキの定理) 実数の不等式だけの世界 (実閉体の理論) は, 有限の手続きで真偽を決められる.

量子化子消去の単純な例

$a > 0$ に対して $ax^2 + bx + c = 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在するか？(∃という量子化子で書かれる文)

上の文の真偽は $b^2 - 4ac \geq 0$ と同じ(∃という量子化子が消えている)

すべての実数(非可算無限ある)を1つ1つ調べることはできないが、量子化子消去により、**有限の手続き**で真偽を決められる。

数理論理学の発展の成果の1つ. Rocq, Leanなど.

ひらめきが必要な証明を書くのは人間, それを機械がチェックする.

例: 四色問題など, 人間がチェックすることが非現実的なほど長い証明が必要.

生成AI(Generative AI)とは、文章や画像を生成する人工知能のこと.

- 自然言語の場合は、大規模言語モデル(Large Language Model, LLM)と呼ばれる.
- 深層学習(2006-)とトランスフォーマー(2017)がコアの技術.
- 人間が細かなルールを書かなくても、**規則を自律的に発見**することができるようになった.
- 結果として、**大学の学部1,2年生レベルの数学の問題**はだいたい解けるようになった.

AIは数学の研究で役に立つか

「AIが数学の未解決問題を解いた」という話はまだ今のところ聞かない。おそらく、数年以内のことだとは思う。

まだできないこと:

- 最先端の数学の内容の理解
- 自ら問題を作って、新しい概念、新しい理論を創る(面白さを理解するのは難しい?)
- 著者として正しさに責任を持つ(多くの雑誌では生成AIは著者になれない)

文献検索や既知の道具の呼び出しとしては有用.

「こういう定理・理論が書かれた論文を探して」といって, 10個出してもらったとする. 4個くらいは存在しない, 4個くらいは存在するが当てはまらない, 2個くらいは正しいものを返す.

「自分でその結果が妥当かどうかを調べることができる」ならば, 文献検索においてとても役に立つ.

将棋のたとえ

- 将棋はAIがトップを超え，棋士の学び方は変わった.
- AIにより人間は強くなる，人間により将棋は面白くなる.
- たぶん，数学も同じ.

第2章のまとめ

- AIは十分多くのデータがあれば、ルールを見つけることができるようになった.
- AIは「正しそうな答え」を出すことはできるが、**正しさに責任を持つ**ことはできない.
- **新しい概念を創造**したり、面白いと感じるのは難しい.

今日からできること

正しさを検証し、責任を持ち、その面白さを理解しよう.

第3章：なぜ数学を学ぶのか

本章のゴール：深く長い思考を行うには，正誤が定まりステップ数の長い数学を学ぶのが良さそう．

任せるには分かっていることが必要

- 計算は機械に任せることができるが、分かっていないと任せることもできない.
- 理工系ではどの学部も教養で数学を学ぶ. 必要だから.

チェックリスト

分かっていますか？

- なぜ正しいか説明できますか？
- 成り立たない場合(反例)を挙げられますか？
- 別解や近似見積もりはできますか？
- 最終責任者として、正しさと分かりやすさを保証できますか？

例題：1変数の最小化（勾配降下法）

- 目的：関数 $f(x)$ の最小値を求める.
- 勾配降下法：

$$x_{n+1} = x_n - \eta f'(x_n) \quad (\eta > 0 : \text{学習率})$$

凸関数の最小化

$f'(x) = 2(x - 3)$, よって

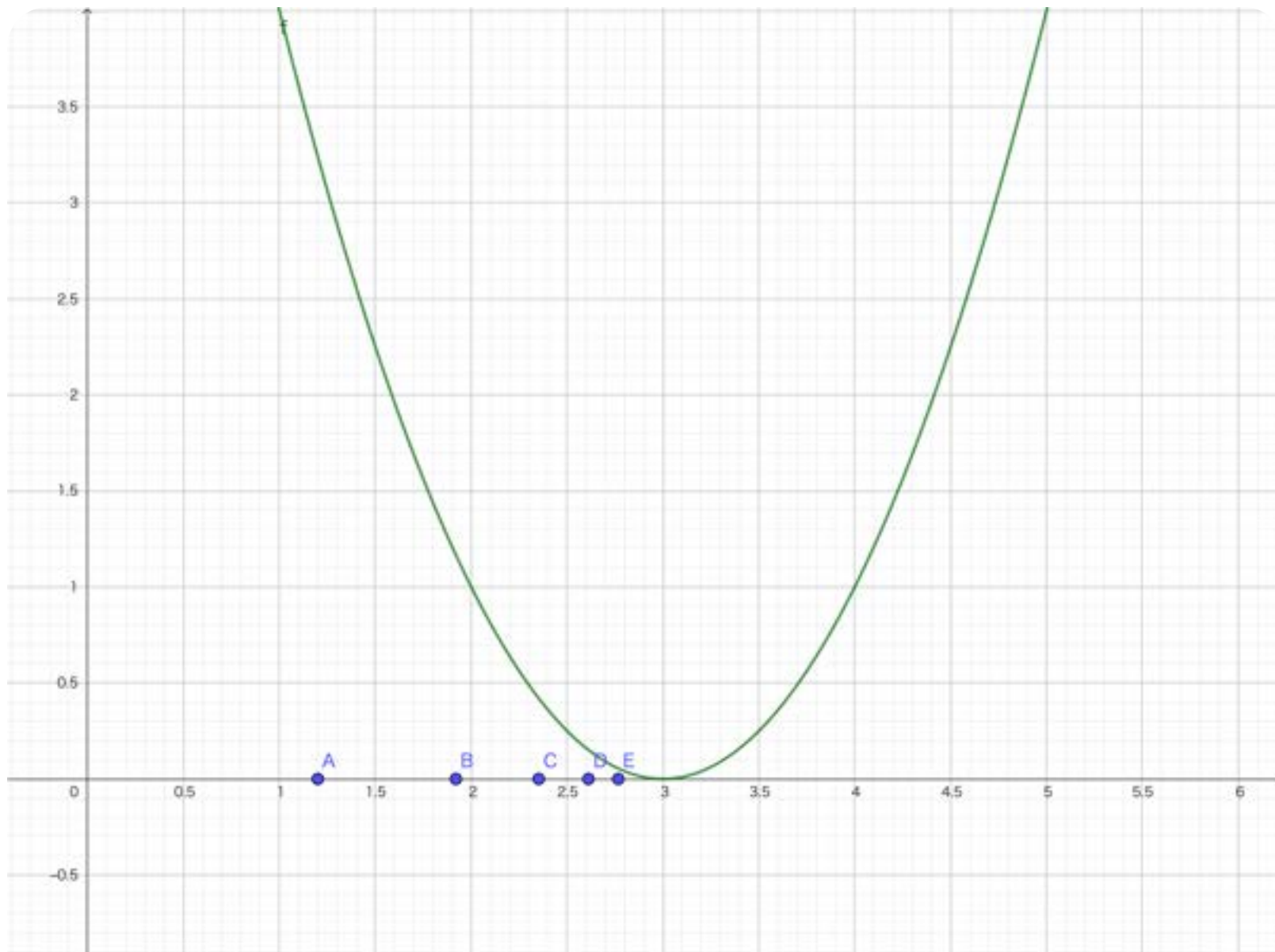
$$x_{n+1} = x_n - \eta \cdot 2(x_n - 3) = (1 - 2\eta)x_n + 6\eta.$$

収束条件 : $|1 - 2\eta| < 1 \iff 0 < \eta < 1$ なら $x_n \rightarrow 3$.

数値例 (初期値 $x_0 = 0$)

良い学習率 ($\eta = 0.2$) :

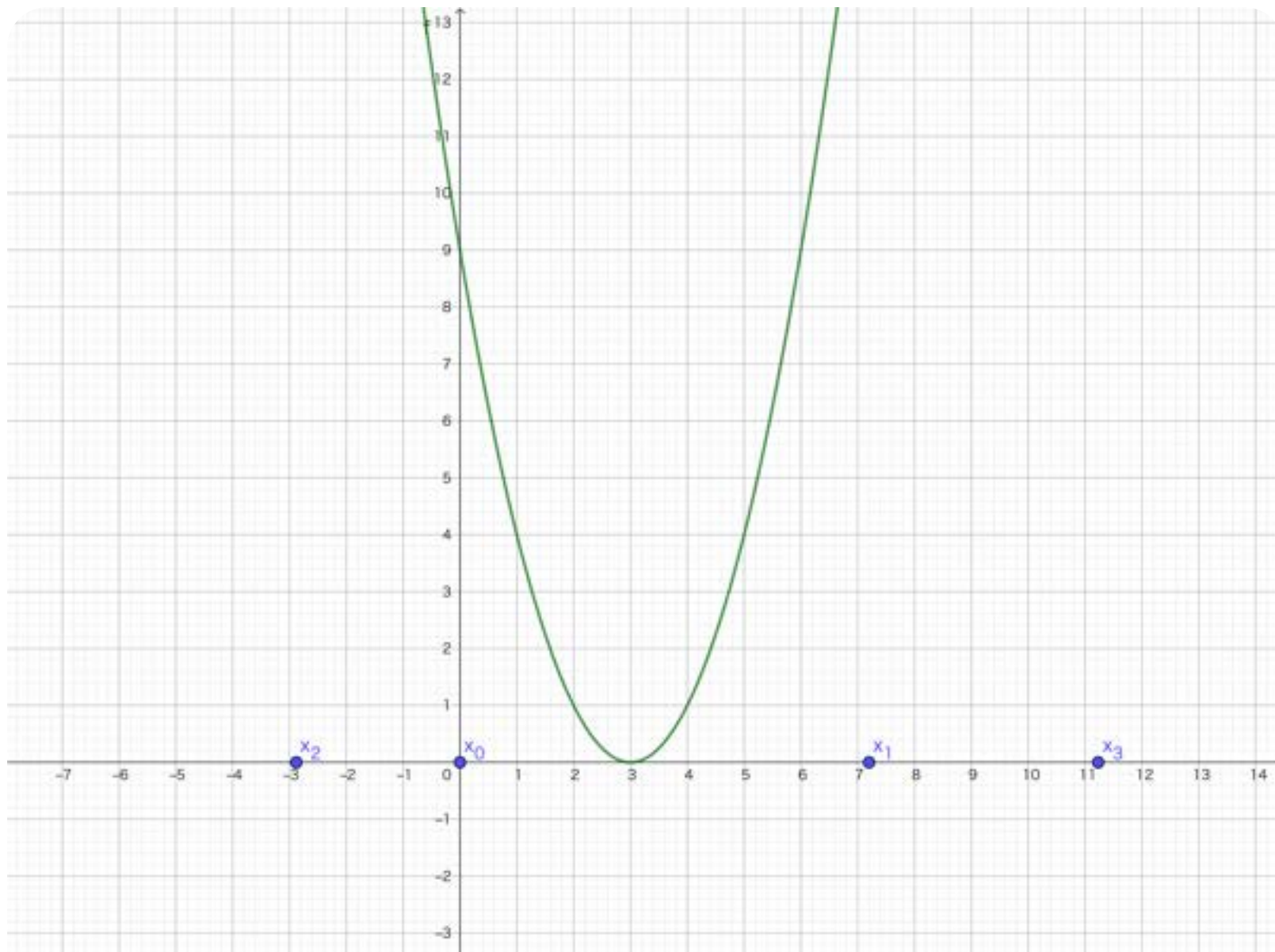
$$x_1 = 1.2, x_2 = 1.92, x_3 = 2.352, x_4 = 2.6112, x_5 = 2.76672 \rightarrow 3$$



大きすぎる学習率 ($\eta = 1.2$: 発散) :

$$x_1 = 7.2, x_2 = -2.88, x_3 = 11.232, \dots \text{ (振幅が増大)}$$

「答えの出し方」だけでなく、「何をしているのか」の理解が必要.



非凸関数の場合

非凸関数の例： $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

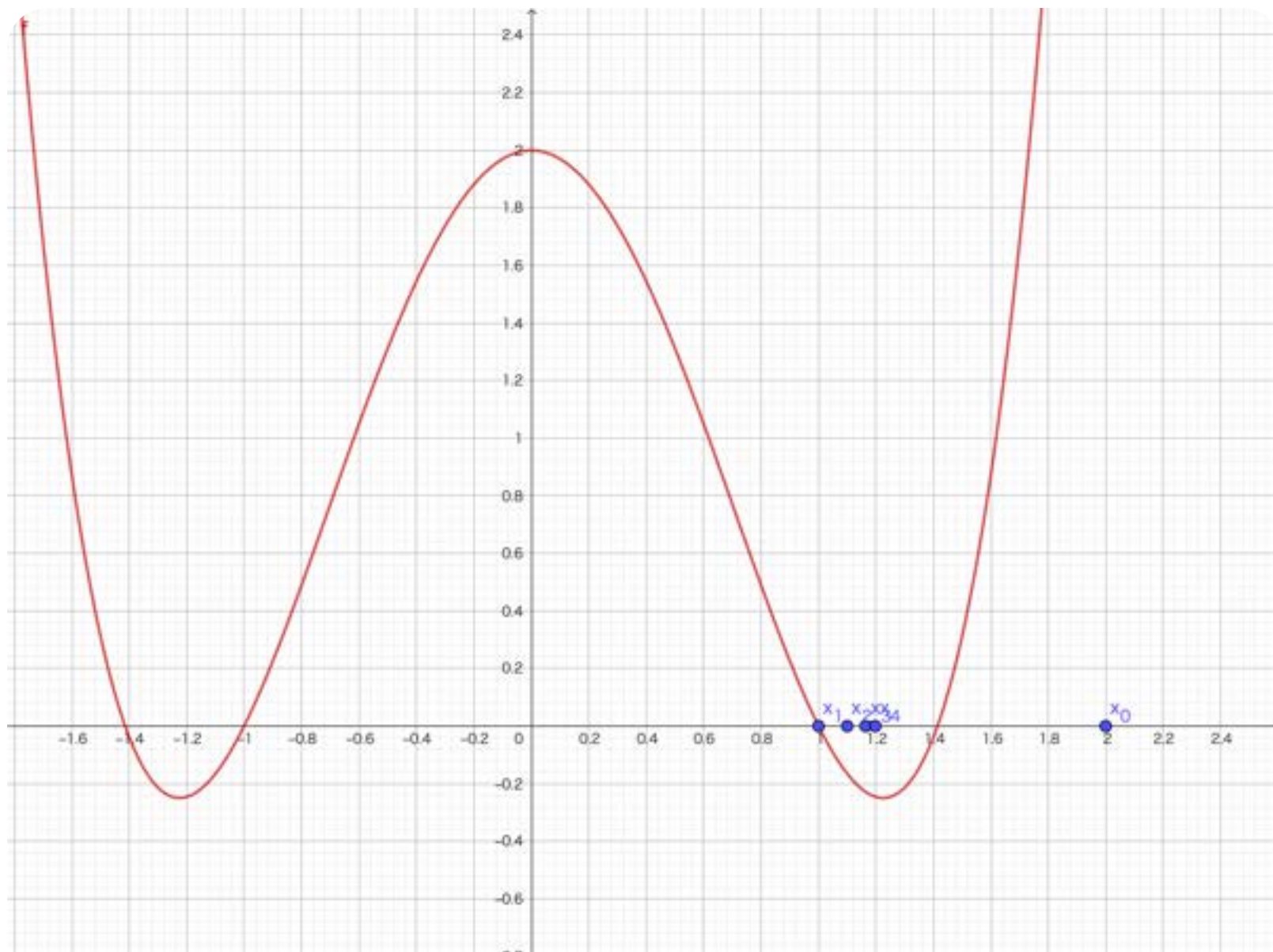
初期値次第で左右どちらの谷に落ちるかが変わる.

数値例 ($\eta = 0.05$)

$$x_0 = 2, x_1 = 1.0, x_2 = 1.1, x_3 = 1.1638, x_4 = 1.1977$$

$\dots \rightarrow \sqrt{3/2} (\approx 1.225)$ に収束

もし, $x_0 = -3$ なら $\dots \rightarrow -\sqrt{3/2}$ に収束



実際のAIでは、パラメータは**超高次元**。一兆次元くらいの非凸関数の最適化をすることになる。

もちろん絵に描けない状況で、何が起きているのかを論理的に理解する必要がある。

生成AIは超優秀な部下だが、「自分ができないことを、何が難しいのか分からずに、答えが正しいことをチェックもできないのに、指示を出すようなパワハラ上司」にならないようにしよう。

数学を勉強しなかったらどうなるか？

「数学を教えない」として実験する？->倫理的に不可能

生成AIも、数学を勉強することで、思考力を鍛えている.

最近話題のトピック：Reinforcement Learning with Verifiable Rewards (RLVR)

数学の問題は**正誤が明確**で、**ステップ数が長い**.

こういう問題に取り組むことが、思考力を鍛えるのに重要らしい. 数学はその意味でとても良い題材.

AIも数学を勉強している。人間も負けないように。

今日からできること

- 何をやっているのか理解したうえで、生成AIと議論すること。無能な上司にならないように。
- ステップ数が長い思考ができるようになること



このスライドを作成するに当たり， ChatGPT5に様々なアドバイスを頂きました． 心より感謝申し上げます．

すべての事柄について理解したうえで修正しました． 本スライドの内容の全責任は著者である私にあります．